AHMAD THOHIR

BARISAN DAN DERET

MATERI PENDAMPING

OLIMPIADE MATEMATIKA

MA/SMA

MA FUTUHIYAH JEKETRO

GUBUG GROBOGAN
JAWA TENGAH

BARISAN DAN DERET

MATERI PENDAMPING OLIMPIADE MATEMATIKA MA/SMA

I. SISTEM BILANGAN REAL DAN OPERASINYA
II. NOTASI SIGMA
III. BARISAN BILANGAN
IV. DERET BILANGAN
V. INDUKSI MATEMATIKA

DISUSUN OLEH :

AHAMD THOHIR, S.Pd

MA FUTUHIYAH JEKETRO GUBUG

JL.RAYA No.02 JEKETRO GUBUG GROBOGAN

2013

Salam sukses untuk kita semua

SINGKATAN

OMITS	**:**	**Olimpiade Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember**
OSK	**:**	**Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Kabupaten/kota**
OSN	**:**	**Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Nasional**
OSP	**:**	**Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Provinsi**

KATA PENGANTAR

Dalam penulisan ebook ini banyak hal yang penulis dapatkan terutama dalam pengetahuan rumus-rumus yang kadang kita merasa hafal di luar kepala, ternyata setelah kita susun menjadi bentuk tulisan ataupun ebook seperti ini, penulis sendiri ataupun mungkin Anda pembaca yang budiman akan merasakan hal yang mungkin belum pernah kita bayangkan, yaitu menemukan banyak kesulitan di banyak bagian yang mana sebelumnya kita merasa cukup menguasainya. Oleh karena itu dari hal tersebut penulis menyusun dan membuat ebook yang sederhana ini yang mengkhususkan membahas *Barisan dan Deret*.

Alhamdulillah penulis ucapkan sebagai rasa syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena dengan pertolongan-Nya penulis diberikan kesempatan untuk dapat menambah tulisan yang sederhana ini dengan segala kelebihan dan kekurangannya yang ada dalam ebook yang ketiga ini.

Kritik dan saran dari pembaca yang budiman akan menjadi hal terbaik dalam penyempurnaan ebook ini dan semoga ebook ini ada manfaatnya khususnya untuk siswa-siswi MA Futuhiyah Jeketro Gubug umumnya untuk kita semua.

Jeketro,   November 2013

AHMAD THOHIR, S.Pd

www.ahmadthohir1089.wordpress.com

DAFTAR ISI

RUANG LINGKUP MATERI BARISAN DAN DERET

NO	BAB/POKOK BAHASAN UTAMA	MATERI
1	SISTEM BILANGAN REAL DAN OPERASINYA	a. Himpunan Bilangan Real b. Operasi Bilangan Real
2	NOTASI SIGMA	a. Pengertian Notasi Sigma b. Sifat-sifat Notasi Sigma c. Variasi Penggunaan Notasi Sigma d. Rumus-Rumus Penting e. Prinsip Teleskopik
3	BARISAN BILANGAN	a. Pengertian Barisan b. Hubungan Antara Relasi, Fungsi, dan Barisan c. Barisan Khusus d. Barisan Aritmetika e. Barisan Aritmetika Bertingkat f. Barisan Geometri g. Barisan Aritmetika-Geometri
4	DERET BILANGAN	a. Pengertian Deret b. Deret Aritmetika c. Deret Geometri (Berhingga) d. Deret Geometri tak Berhingga e. Deret Aritmetika-Geometri Berhingga f. Deret Aritmetika-Geometri tak Berhingga g. Deret Khusus
5	INDUKSI MATEMATIKA	a. Pembuktian Dalam Matematika b. Prinsip Induksi Matematika (PIM) c. Beberapa Kesalahan(fallacy) dalam Pembuktian

1. Sistem Bilangan Real

1.1.Himpunan Bilangan Real($\mathbb{R}$)

Himpunan bilangan real mencakup 2 buah himpunan bilangan yaitu himpunan bilangan rasional dan bilangan irasional

1.1.1.Himpunan Bilangan Rasional($\mathbb{Q}$)

Himpunan bilangan rasional adalah semua bilangan yang dapat dinyatakan dengan suatu pecahan baik biasa maupun campuran dengan penyebut tidak sama dengan nol, dengan kata lain $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$. Bilangan desimal berulang termasuk dalam bilangan ini.

Himpunan bilangan rasional mencakup himpunan bilangan asli($\mathbb{N}$), bilangan cacah($\mathbb{W}$), dan bilangan bulat($\mathbb{Z}$)

1.1.2.Himpunan Bilangan Irasional(Bilangan Bentuk Akar)

Himpunan bilangan irasional adalah kebalikan dari himpunan bilangan rasional, yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatkan dalam bentuk pecahan termasuk di dalamnya pecahan tidak berulang.

Contoh A.1

1) (OSK 2005) Bilangan $\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$ adalah termasuk bilangan

A. Tak rasional positif
B. Tak rasional negatif
C. Rasional tidak bulat
D. Bulat positif
E. Bulat negatif

Jawab :

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{\left((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right)\left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right)} = \frac{1}{(1-2)(4-3)} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

Sehingga jawaban yang paling tepat adalah E. Bulat negatif

2) (OSP 2005) Misalkan a sebuah bilangan rasional dan b adalah sebuah bilangan takrasional, maka $a + b$ adalah bilangan. …

Jawab :

Karena a bilangan rasional dan b tak rasional maka $a + b$ akan menjadi bilangan tak rasional

Sebagi ilustrasinya adalah, misalkan $a = 3$ (3 adalah bilangan rasional) dan $b = \sqrt{5}$ ($\sqrt{5}$ adalah sebuah bilangan tidak rasional, maka $a + b = 3 + \sqrt{5}$ ($\underbrace{3 + \sqrt{5}}_{satu\ bilangan}$ adalah bilangan baru hasil penjumlahan a dan b yang tak rasional)

Perhatikan juga tabel berikut

Bilangan	Bulat		Rasional	Irasional/tidak rasional
	Positif	Negatif		
2	√	-	√	-
0,1089	-	-	√	-
1+√2	-	-	-	√

3) (OSN 2005) Diberikan k dan m bilangan-bilangan asli sehingga $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ adalah bilangan bulat.

a. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan rasional
b. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan asli

Jawab :

a) Karena $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ adalah bulat serta k dan m bilangan-bilangan asli. Perhatikan bahwa $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ adalah akar dari persamaan kuadrat dalam n dari $n^2 + \left(\sqrt{k}\,\right)n - \left(\sqrt{m}\,\right) = 0$, Sehingga $\sqrt{m} = n^2 + n\sqrt{k}$. Selanjutnya kuadratkan masing-masing ruas, maka kita mendapatkan $m = n^4 + 2n^3\sqrt{k} + n^2k \Leftrightarrow 2n^3\sqrt{k} = m - (n^4 + n^2k) \Leftrightarrow \sqrt{k} = \frac{m-(n^4+n^2k)}{2n^3}$

Dari bentuk terakhir jelas bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan bentuk pecahan karena ada pembilang dan penyebut dengan k dan m bilangan-bilangan asli.

Sehingga terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan rasional. ■

b) Misalkan $\sqrt{k} = \frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{N}$ dan $FPB(a, b) = 1$

Kuadratkan masing-masing ruas, sehingga kita mendapatkan $k = \frac{a^2}{b^2}$. Karena k adalah bilangan asli, haruslah $b^2 = 1$ dan kita mendapatkan $k = a^2$ sehingga $\sqrt{k} = a$ dengan a adalah bilangan asli

Jadi terbukti bahwa $\sqrt{k}$ bilangan asli. ■

1.2.Operasi Bilangan Real

Dalam operasi bilangan real ada 2 macam operasi bilangan, yaitu secara aljabar tidak aljabar(transenden)

1.2.1.Operasi Aljabar

a. Bilangan bentuk pangkat
   Perhatikan bentuk bilangan $a^p = \underbrace{a.a.a.\ldots\ .a}_{sebanyak\ p}$,dengan a adalah bilangan pokok(basis) dan p adalah bilangan pangkat(derajat) dari a.
   Beberapa formula pada bilangan berpangkat(tentunya dengan berbagai syarat)
   - m^px $m^q = m^{p+q}$
   - $m^p : m^q = m^{p-q}$
   - $(m^p)^q = m^{p\,x\,q}$
   - $(n.m)^p = n^p x\, m^p$
   - $\left(\frac{n}{m}\right)^p = \frac{n^p}{m^p}$
   - $m^{-p} = \frac{1}{m^p}$
   - $m^0 = 1$,dengan $m \neq 0$
   - $m^1 = m$
   - $(n+m)^1 = n+m$
   - $(n-m)^2 = (m-n)^2$
   - $(n+m)^2 = n^2 + 2nm + m^2 = n^2 + m^2 + 2nm$
   - $(n-m)^2 = n^2 - 2nm + m^2 = n^2 + m^2 - 2nm$
   - $(n+m)^3 = n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + m^3 = n^3 + m^3 + 3nm(n+m)$
   - $(n-m)^3 = n^3 - 3n^2m + 3nm^2 - m^3 = n^3 - m^3 - 3nm(n-m)$
   - $n^p + m^p = (n+m)(n^{p-1} - n^{p-2}m + n^{p-3}m^2 - \cdots - nm^{p-2} + m^{p-1})$ dengan $p \in$ bilangan ganjil
   - $n^p - m^p = (n-m)(n^{p-1} + n^{p-2}m + n^{p-3}m^2 + \cdots + nm^{p-2} + m^{p-1})$ dengan $p \in$ bilangan asli.
   - $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k$ dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
   - $1 + m = \frac{1-m^2}{1-m}$
   - $1 + m + m^2 = \frac{1-m^3}{1-m}$
   - $1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + m^5 = \frac{1-m^6}{1-m}$
   - $1 + m + m^2 + m^3 + \cdots = \frac{1}{1-m} = (1-m)^{-1}$
   - $1 + (3m) + (3m)^2 + (3m)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(3m)}$
   - $1 - (3m) + (3m)^2 - (3m)^3 + \cdots = \frac{1}{1+(3m)}$
   - $1 + m + m^2 + m^3 + \cdots + m^p = \frac{m^{p+1}-1}{m-1}$

b. Bilangan tidak berpangkat(bilangan berderajat 1)
   Berbagai sifatpun akan muncul dari operasi bilangan jenis ini baik sifat asosiatif, komutatif, distributif, dan unsur identitas.

1.2.2.Operasi tidak Aljabar(Transenden)

Operasi bilangan yang tidak dapat menggunakan prinsip aljabar langsung pada umumnya misalkan

- Logaritma
  i. $\log m + \log n = \log(m.n)$ dengan $m, n > 1$
  ii. $\log m - \log n = \log\left(\frac{m}{n}\right)$
  iii. $\log m^n = n.\log m$
  iv. $\log 2 = 0{,}3010$
  v. $\log 3 = 0{,}4771$
  vi. $\log 5 = 0{,}6990$
- Trigonometri
  i. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
  ii. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
  iii. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
  iv. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
  Misalkan, pada sudut dalam segitiga
  v. $\sin A + \sin B + \sin C = 4cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
  vi. $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$
  vii. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Contoh A.2

1) (OSN 2003) Jika a adalah bilangan bulat, buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6

Jawab :

Penguraian bentuk $a^9 - a$ akan menghasilkan

$a^9 - a = a(a^8 - 1) = a(a^4 + 1)(a^4 - 1) = a(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a^2 - 1) = a(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$

Perhatikanlah bahwa $a^9 - a = (a-1)a(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$, karena $(a-1)a(a+1)$ adalah 3 bilangan berurutan, maka $(a-1)a(a+1)$ habis dibagi oleh $3!$ dengan kata lain $(a-1)a(a+1)$ habis dibagi 6. Karena $(a-1)a(a+1)$ adalah factor dari $a^9 - a$, maka $a^9 - a$ juga habis dibagi oleh 6. ■

2) (OSN 2013) Suatu bilangan asli dikatakan “$kuat$” jika ada bilangan asli x sehingga $x^{nx} + 1$ habis dibagi oleh 2^n

a. Buktikan bahwa 2013 adalah bilangan kuat
b. Jika m bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil y sehingga $y^{my} + 1$ habis dibagi oleh 2^m

Jawab :

a) Misalkan kita pilih $x = 3$,maka

$$\frac{3^{2013(3)}+1}{2^{2013}} = \frac{\left(3^{2013}\right)^3+1}{2^{2013}} = \frac{\left(3^{2013}\right)^3+1^3}{2^{2013}}$$

$$= \frac{\left(3^{2013}+1\right)\left(\left(3^{2013}\right)^2-3^{2013}+1\right)}{2^{2013}}$$

$$= \frac{\left((4-1)^{2013}+1\right)\left(\left(3^{2013}\right)^2-3^{2013}+1\right)}{2^{2013}}$$

Untuk

$(4-1)^{2013} =$
$\binom{2013}{0}4^{2013}.1^0 - \binom{2013}{1}4^{2013-1}.1^1 + \binom{2013}{2}4^{2013-2}.1^2 - \cdots + \binom{2013}{2012}4^{2013-2012}.1^{2012} - \binom{2013}{2013}4^{2013-2013}.1^{2013}$.

$((4-1)^{2013}+1) = \left(\binom{2013}{0}4^{2013}.1^0 - \binom{2013}{1}4^{2013-1}.1^1 + \binom{2013}{2}4^{2013-2}.1^2 - \cdots + \binom{2013}{2012}4^{2013-2012}.1^{2012} - \binom{2013}{2013}4^{2013-2013}.1^{2013} - 1\right) =$
$\left(\binom{2013}{0}4^{2013}.1^0 - \binom{2013}{1}4^{2013-1}.1^1 + \binom{2013}{2}4^{2013-2}.1^2 - \cdots + \binom{2013}{2012}4^{2013-2012}.1^{2012}\right) =$
$2^{2013}\left(\binom{2013}{0}.2^{2013} - \binom{2013}{1}2^{2011} + \binom{2013}{2}2^{2009} - \cdots + \binom{2013}{2012}2^{-2011}\right)$

Misalkan $b = \left(\binom{2013}{0}.2^{2013} - \binom{2013}{1}2^{2011} + \binom{2013}{2}2^{2009} - \cdots + \binom{2013}{2012}2^{-2011}\right)$, maka $((4-1)^{2013}+1) = 2^{2013}.b$

Sehingga

$\frac{3^{2013(3)}+1}{2^{2013}} = \frac{\left(3^{2013}\right)^3+1}{2^{2013}} = \frac{\left((4-1)^{2013}+1\right)\left(\left(3^{2013}\right)^2-3^{2013}+1\right)}{2^{2013}} = \frac{2^{2013}.b\left(\left(3^{2013}\right)^2-3^{2013}+1\right)}{2^{2013}} = b((3^{2013})^2 - 3^{2013}+1)$

Terbukti bahwa 2013 adalah bilangan kuat. ■

b) Jika m bilangan kuat dan $y^{my}+1$ habis dibagi 2^m serta $m, y \in \mathbb{N}$, kita pilih saja $m = y = 1$ supaya didapatkan nilai y terkecil, yaitu

$$y = \frac{1^{1.1}+1}{2^1} = 1$$

2. Notasi Sigma

2.1.Pengertian Notasi Sigma

- Notasi sigma diperlihatkan sebagai ∑ (huruf kapital Yunani) yang berarti *penjumlahan(sum).*
- Notasi yang digunakan untuk menuliskan secara singkat penjumlahan n suku
- Untuk bilangan-bilangan yang selanjutnya dinamakan suku-suku maka dapat diilustrasikan sebagai $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$
- Bentuk $\sum_{k=1}^{n} u_k$, dibaca sigma dari u_k yang bergerak dari 1 dan berakhir sampai kepada n.
- Bilangan 1 disebut sebagai batas bawah dan n sebagai batas atas penjumlahan.

2.2.Sifat-Sifat

- $\sum_{k=1}^{3} u_k = u_1 + u_2 + u_3$
- $\sum_{k=1}^{5} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$
- $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$
- $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$
- $\sum_{k=1}^{n} c = c.n$
- $\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - u_1$
- $\sum_{k=1}^{5}(ak + b) = (a + b) + (2a + b) + (3a + b) + (4a + b) + (5a + b)$
- $\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$
- $\sum_{k=1}^{n} c.u_k = c \sum_{k=1}^{n} u_k$

2.3.Beberapa Variasi Penggunaan Notasi Sigma

2.3.1.Dobel(ganda) sigma

Dobel sigma didefinisikan sebagai

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} u_{j,k} \overset{\boldsymbol{def}}{=} \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=1}^{K} u_{j,k} \right) = \sum_{k=1}^{K} u_{1,k} + \sum_{k=1}^{K} u_{2,k} + \cdots + \sum_{k=1}^{K} u_{j,k}$$

Sebagai ilustrasi

$\sum_{j=0}^{1} \sum_{k=1}^{3} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=1}^{3} u_{j,k} = \left(u_{0,1} + u_{0,2} + u_{0,3}\right) + \left(u_{1,1} + u_{1,2} + u_{1,3}\right)$

2.3.2.Tanda sigma dengan batas pertidaksamaan

Ilustrasi diantaranya misalkan,

$$\sum_{1 \le k \le n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Contoh B.1

1) Tunjukkan bahwa $\sum_{j=0}^{1} \sum_{k=1}^{3} u_{j,k} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=0}^{1} u_{j,k}$

Jawab :

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=1}^{3} u_{j,k} = (u_{0,1}+u_{0,2}+u_{0,3}) + (u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3})$$

$$= (u_{0,1}+u_{1,1}) + (u_{0,2}+u_{1,2}) + (u_{0,3}+u_{1,3}) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=0}^{1} u_{j,k}$$

2) Tunjukkan bahwa

$$\sum_{-2\le k\le n-3} 2^{k+2} = 2^n - 1$$

Jawab :

$$\sum_{-2\le k\le n-3} 2^{k+2} = \sum_{0\le k+2\le n-1} 2^{k+2} = \sum_{0\le k\le n-1} 2^{k} = 2^n - 1. \ \blacksquare$$

Penjelasan : pada langkah pertama tanda $-2 \le k \le n-3$ masing-masing ditambah dengan 2. Kemudian pada langkah ke-2 kita ganti $k+2$ dengan k seperti yang kita lihat pada langkah ke-3.

2.4.Rumus-Rumus Penting

- $\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb) = an + \frac{bn(n-1)}{2}$,adalah deret aritmetika
- $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{r^n-1}{r-1}$,adalah deret geometri
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
- $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$
- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$
- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$
- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
- $\sum_{k=1}^{n}(k+a)(k+b) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3a+3b) + nab$
- $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

2.5.Prinsip Teleskopik

- $\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - x_1$
- $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_2}{x_1}.\frac{x_3}{x_2}.\frac{x_4}{x_3}. \ \dots \ .\frac{x_n}{x_{n-1}}.\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_1}$

- $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
- $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$
- $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$
- $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$
- $\frac{1}{x.(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$
- $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)$
- $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$

Contoh B.2

1) (OSK 2011)Tentukanlah bilangan bulat positif terkecil a sehingga $2a + 4a + 6a + \cdots + 200a$ merupakan kuadrat sempurna

Jawab :

Karena $2a + 4a + 6a + \cdots + 200a$ merupakan kuadrat sempurna, maka $2a + 4a + 6a + \cdots + 200a$ dapat dituliskan sebagi $2a + 4a + 6a + \cdots + 200a = (2a)\left(\frac{(100)(101)}{2}\right) = (100)(101)a = 10^2.101a = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Jelas bahwa a haruslah bernilai 101.

2) Tentukanlah nilai untuk $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2013$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} &1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2013 \\ &= \sum_{i=1}^{2013} i - 2\sum_{i=1}^{1006} 2i = \sum_{i=1}^{2013} i - 4\sum_{i=1}^{1006} i = \frac{(2013)(2014)}{2} - 4.\frac{(1006)(1007)}{2} \\ &= (2013)(1007) - (2012)(1007) = 1007 \end{aligned}$$

3) Hitunglah nilai dari

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{(2013)(2014)}$
b. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(4025)(4027)}$

Jawab :

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(2013)(2014)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(2013)(2014)}=\frac{2013}{2014}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{(4025)(4027)}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(4026-1)(4026+1)}=\frac{2013}{4027}$

Catatan : Gunakanlah rumus yang sudah ada pada poin 2.5.Prinsip Teleskopik untuk penyelesaian soal a) dan b)

4) Hitunglah nilai dari $\prod_{k=1}^{2013}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

Jawab :

$$\prod_{k=2}^{2013}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2012}\right)\left(1-\frac{1}{2013}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\ldots\left(\frac{2012}{2013}\right)$$
$$=\frac{1}{2013}$$

3. Barisan Bilangan

3.1.Pengertian Barisan

- Barisan bilangan adalah urutan bilangan yang mengikuti aturan(pola) tertentu
- Nama suatu barisan biasanya diambilkan dari bilangan yang membentuk barisan itu

3.2.Hubungan antara Relasi, Fungsi dan Barisan

- Dua hal atau lebih dapat dikatakan berelasi jika terdapat suatu hubungan atau keterkaitan. Misalnya relasi lebih kecil atau lebih besar antara bilangan-bilangan
- Bentuk khusus dari relasi adalah fungsi
- Jika $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli dan A adalah sebuah himpunan, maka fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ disebut sebagai barisan elemen-elemen dalam himpunan A. Sebagai bayangan dari $n \in \mathbb{N}$ adalah $f(n) = a_n \in A$ oleh fungsi f.
- Barisan untuk elemen-elemen pada himpunan A biasanya dituliskan dengan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ atau $\{a_n\}$ dengan $n \in \mathbb{N}$.
- Selanjutnya $a_1, a_2, a_3, \ldots$ disebut suku-suku dari barisan tersebut.

3.3.Barisan Khusus

Beberapa barisan bilangan terbilang khusus, di antaranya adalah:

3.3.1.Barisan Bilangan pada Rumus Rekursif

- Jika diketahui pola bilangan
- Pembentukan suku-suku berikutnya berasal dari suku-suku sebelumnya
- Barisan aritmetika dan barisan geometri termasuk di dalamnya

3.3.2.Barisan Bilangan pada Fungsi Pembangkit(Generating Function)

- Diberikan sebuah barisan bilangan real $\{a_n\}$: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dengan indeks n. Fungsi pembangkit didefinisikan sebagai deret pangkat(power series)

$$\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}$$

- Masalah konvergensi tidak diperhatikan di sini

3.3.3.Barisan Bilangan pada Relasi Rekursif

- Relasi rekursif adalah nama lain dari fungsi rekursif (recurrence relation)
- Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi
- Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi dari fungsinya akan mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh C.1

1) (OSK 2011) Jika bilangan asli disusun seperti berikut di bawah ini

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

…

Tentukanlah besar bilangan ketiga pada baris ke-50

Jawab :

Perhatikanlah angka terakhir pada setiap baris, ternyata berupa bilangan kuadrat. Sehingga pada baris ke 50 angka *ketiganya* adalah besar angka terakhir baris ke-49 dikuadratkan ditambah 3, yaitu $49^2 + 3 = 2401 + 3 = 2404$

2) (OMITS SMP 2012) Diketahui barisan bilangan 3, 6, 11, 20, 37, x , 135. Maka milai x adalah

Jawab :

Perhatikanlah pola dari soal di atas, yaitu

$u_2 - u_1 = 6 - 3 = 3 \quad \rightarrow (3 + 0)$

$u_3 - u_2 = 11 - 6 = 5 \quad \rightarrow (6 - 1)$

$u_4 - u_3 = 20 - 11 = 9 \quad \rightarrow (11 - 2)$

$u_5 - u_4 = 37 - 20 = 17 \quad \rightarrow (20 - 3)$

$u_6 - u_5 = x - 37 = y \quad \rightarrow (y = 37 - 4 = 33)$

Sehingga diperoleh nilai $x = 37 + 33 = 70$

3) Tuliskan enam suku dari barisan yang definisikan denga rumus $u_{n+1} = 2u_n - (-1)^n$ dengan $u_1 = 1$

Jawab :

Barisan bilangan yang dimaksud termasuk rumus rekursif

Diketahu bahwa $u_1 = 1$ sebagai suku awal

$u_2 = 2u_1 - (-1)^1 = 2.1 - (-1) = 2 + 1 = 3$

$u_3 = 2u_2 - (-1)^2 = 2.3 - (1) = 6 - 1 = 5$

$u_4 = 2u_3 - (-1)^3 = 2.5 - (-1) = 10 + 1 = 11$

$u_5 = 2u_4 - (-1)^4 = 2.11 - (1) = 22 - 1 = 21$

$u_6 = 2u_5 - (-1)^5 = 2.21 - (-1) = 42 + 1 = 43$

Enam suku barisan tersebut adalah $1,3,5,11,21,43$.

4) Fungsi Ackerman adalah suatu relasi rekursif dengan 2 variabel bilangan bulat didefinisikan sebagai

- $A(0, n) = n + 1$
- $A(m, 0) = A(m - 1,1)$
- $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$

Tentukan nilai dari $A(1,3)$

Jawab :

$A(1,3) = A(1 - 1, A(1,3 - 1)) = A(0, A(1,2))$

$A(1,3) = A(0, A(1,2)) = A(0, A(1 - 1, A(1,2 - 1))) = A(0, A(0, A(1,1)))$

$A(1,3) = A(0, A(0, A(1,1))) = A(0, A(0, A(1 - 1, A(1,0)))) = A(0, A(0, A(0, A(1,0))))$

$A(1,3) = A(0, A(0, A(0, A(1,0)))) = A(0, A(0, A(0, A(1 - 1,1)))) =$
$A(0, A(0, A(0, A(0,1)))) = A(0, A(0, A(0,2))) = A(0, A(0,3)) = A(0,4) = 5$

Jadi $A(1,3) = 5$

5) Carilah fungsi pembangkit dari barisan berikut, dan sederhanakan setiap jawaban

a. $1,1,1,1,1,1,0,0,0, \dots$

b. $1,1,1,1,1,\ldots$
c. $1,3,3,1,0,0,0,\ldots$

Jawab :

a) Fungsi pembangkitnya adalah $P(x) = 1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 0x^6 + 0x^7 + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$

b) Fungsi pembangkitnya adalah $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, untuk $|x| < 1$

c) Fungsi pembangkitnya aadalah $P(x) = 1 + 3x + 3x^2 + 1 = (1 + x)^3$

3.4.Barisan Aritmetika

- Barisan aritmetika adalah barisan bilangan di mana setiap 2 suku yang berurutan selalu memiliki selisih yang tetap(konstan)
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ disebut barisan aritmetika, jika $u_n - u_{n-1} = b$ pada tiap nilai n dengan b adalah suatu tetapan yang selanjutnya disebut $beda$ yang tidak tergantung pada harga n.
- Bentuk Umum : a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, … , $a + (n - 1)b$.
- Suku tengah (u_k) adalah $u_k = \frac{1}{2}(u_1 + u_{2k-1})$ jika pada barisan aritmetika dengan banyak suku $(2k - 1)$ dan k adalah bilangan asli yang lebih dari 2.
- Misalkan di antara $x\ dan\ y$ disisipkan sebanyak k bilangan asli, sehingga barisan $,(x + b),(x + 2b),(x + 3b),\ldots,(x + kb), y$. Maka untuk menentukan b baru pada sisipan dapat ditentukan dengan rumus $= \frac{y-x}{k+1}$.

3.5.Barisan Aritmetika Bertingkat

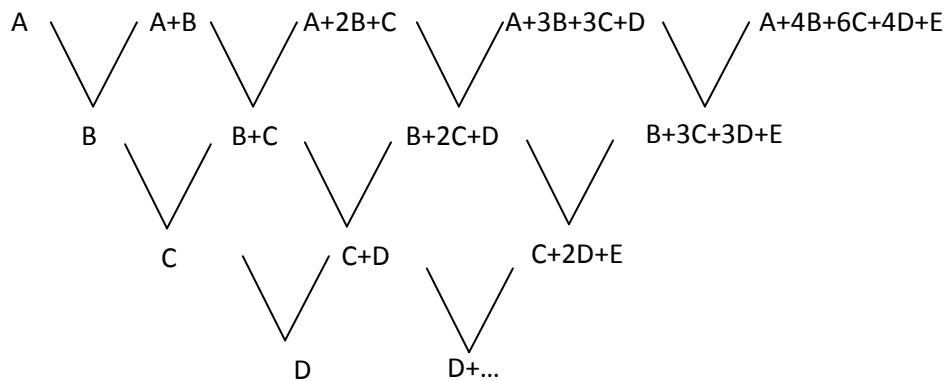
Pada barisan ini tinggal melihat posisi suku sesudahnya

a. Tingkat pertama
   Adalah barisan aritmetika itu sendiri, lihat pembahasan tentang barisan aritmetika
b. Tingkat kedua(kuadrat)
   Jika pada pola selisih tingkat pertama membentuk lagi selisih tetap seolah-olah sebagi selisih kedua
   Jika $u_n = an^2 + bn + c$,maka
   1) $a = \frac{u_3+u_1-2u_2}{2} = \frac{selisih\ pada\ tingkat\ kedua}{2}$
   2) $a + b + c = u_1$
   3) $3a + b = u_2 - u_1$
   4) $5a + b = u_3 - u_2$
   5) $2a = u_1 + u_3 - 2u_2$
c. Tingkat ketiga
   Jika pada pola selisih tingkat kedua membentuk lagi selisih tetap seolah-olah sebagai selisih ketiga

Jika $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, dengan

1) u_n adalah rumus suku ke-n
2) $a = \frac{selisih\ terakhir\ pada\ tingkat\ akhir}{6}$
3) $a + b + c + d = u_1 = suku\ pertama$
4) $8a + 4b + 2c + d = S_2$
5) $27a + 9b + 3c + d = S_3$

d. Tingkat ke-n

Misalkan $u_1 = A =$ suku pertama. B, C, D, dan seterusnya selanjutnya adalah beda tiap tingkatan. Perhatikan bagan berikut

Maka untuk

- $u_1 = A$
- $u_2 = A + B$
- $u_3 = A + 2B + C$
- $u_4 = A + 3B + 3C + D$
- ...
- $u_n = A + \frac{(n-1)}{1!}B + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}D + \cdots$

Pola koefisien A, B, C, D, dan seterusnya pada u_n mengikuti pola pada *binom Newton*

Contoh C.2

1) Jika diketahui barisan aritmetika $2,7,12,17, \dots$ maka suku ke 2013 adalah

Jawab :

Dalam hal ini $a = u_1 = 2$ dan beda = $b = u_2 - u_1 = 7 - 2 = 5$.

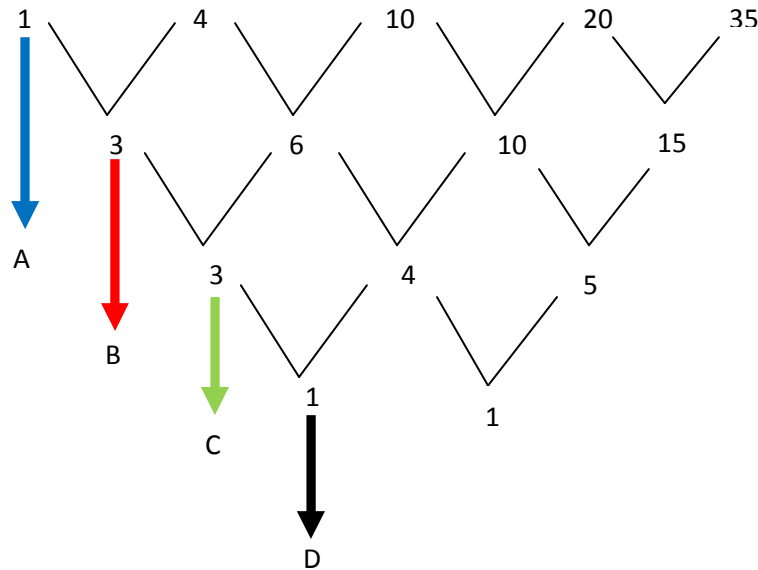
Sehingga suku ke 2013 adalah $u_{10} = a + (2013 - 1)b = 2 + (2012)5 = 2 + 10060 = 10062$

2) Diketahui barisan bertingkat dengan suku-suku sebagai berikut

$$1, 4, 10, 20, 35, \dots$$

Tentukan besar suku ke-10 dan rumus suku ke-n

Jawab :

Perhatikan bagan berikut

Dari bagan di atas dapat kita simpulkan bahwa barisan suku-suku di atas membentuk barisan aritmetika tingkat 3.

Untuk u_{10} adalah

$$u_{10} = 1 + \frac{(10-1)}{1!}(3) + \frac{(10-1)(10-2)}{2!}(3) + \frac{(10-1)(10-2)(10-3)}{3!}(1) = 220$$

Dan $u_n = 1 + \frac{(n-1)}{1!}(3) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(3) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(1)$

$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

3) Ada 3 buah bilangan yang membentuk barisan aritmatika. jika suku tengah dikurangi 5 maka menjadi barisan geometri dengan rasio 2. Jumlah barisan aritmatika tersebut adalah...

Jawab :

Misalkan 3 buah bilangan yang membentuk barisan aritmatika itu adalah $a, (a+b), (a+2b)$ dan jika $a, (a+b-5), (a+2b)$ akan terbentuk barisan geometri.

- Pada barisan geometri berlaku $U_2^2 = U_1 . U_3$, sehingga

$$(a+b-5)^2 = a.(a+2b)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 10a - 10b + 25 = a^2 + 2ab$$

$$b^2 - 10b + 25 = 10a$$
$$(b-5)^2 = 10a$$
$$b - 5 = \pm\sqrt{10a}$$

- Pada barisan geometri di atas juga disebutkan rasionya 2, sehingga

$$\frac{U_2}{U_1} = 2$$
$$\frac{U_3}{U_1} = 2^2 = 4$$
$$\frac{a+2b}{a} = 4 \Rightarrow a + 2b = 4a \Rightarrow 2b = 3a$$

Hasil pada poin 1) dan 2) disubstitusikan, sehingga

Untuk $2b = 3a \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$

$$\left(\frac{3}{2}a - 5\right)^2 = 10a$$

$$\frac{9}{4}a^2 - 25a + 25 = 0$$

$$a = \begin{cases} a_1 = 10 \Rightarrow b_1 = 15 \\ a_2 = \dfrac{10}{9} \Rightarrow b_2 = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Sehingga ada 2 barisan aritmatika dan goemetri jika suku kedua dikurangi 5 sekaligus, yaitu

- Barisan aritmatika $= \begin{cases} 10, 25, 40 \Rightarrow S_3 = 10 + 25 + 40 = 75 \\ \frac{10}{9}, \frac{25}{9}, \frac{40}{9} \Rightarrow S_3 = \frac{75}{9} \end{cases}$
- Barisan geometri $= \begin{cases} 10, 20, 40 \\ \frac{10}{9}, \frac{20}{9}, \frac{40}{9} \end{cases}$

Jadi, jumlah barisan aritmatika di atas adalah 75 atau $\frac{75}{9}$

4) Diantara bilangan 6 dan 30 disisipkan 5 buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmatika. Tentukan beda dari barisan baru tersebut(setelah disisipi 5 bilangan)

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa $x = 6$, $y = 30$, dan $k = 5$, maka beda baru setelah disisipi adalah

$$b' = \frac{y-x}{k+1} = \frac{30-6}{5+1} = \frac{24}{6} = 4$$

Jadi beda baru setelah disisipkan 5 bilangan adalah 4.

3.6.Barisan Geometri

- Barisan geometri adalah barisan bilangan di mana setiap 2 suku yang berurutan selalu memiliki perbandingan yang tetap(konstan)
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ disebut barisan geometri, jika $\frac{u_n}{u_{n-1}} = r$ pada tiap nilai $n \in \mathbb{N}$ dengan r adalah suatu tetapan yang selanjutnya disebut $rasio$ yang tidak tergantung pada harga n.
- Bentuk Umum : a, ar, ar^2, ar^3, ... , ar^{n-1}.
- Suku tengah (u_k) adalah $u_k = \sqrt{u_1 . u_{2k-1}}$ jika pada barisan geometri dengan banyak suku $(2k-1)$ dan k adalah bilangan asli yang lebih dari 2.
- Misalkan di antara $x\ dan\ y$ disisipkan sebanyak k bilangan asli, sehingga barisan menjadi: $, xr, xr^2, xr^3, \dots, xr^k, y$. Maka untuk menentukan r baru pada sisipan dapat ditentukan dengan rumus = $\sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$.

3.7.Barisan Aritmetika-Geometri

- Barisan aritmetika-geometri adalah barisan bilangan di mana tiap sukunya dibentuk dengan menambahkan dan sekaligus mengalikan dari suku sebelumnya
- Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ disebut barisan aritmetika-geometri, jika tiap 3 suku berurutan memiliki *pola barisan aritmetika dan sekaligus pola barisan geometri* dengan suku awal (a_1) adalah 1 untuk deret geometri.
- Bentuk Umum : a , $(a+b)r$, $(a+2b)r^2$, $(a+3b)r^3$, ... , $(a+(n-1)b)r^{n-1}$.
- Untuk suku ke-n yaitu $u_n = (a+(n-1)b)r^{n-1}$

Contoh C.3

1) Diketahui suatu barisan geometri adalah $128,64,32,16,\dots$ tentukan besar suku ke 2013

Jawab :

Dalam hal ini $a = u_1 = 128 = 2^7$ dan rasio(pembanding)nya = $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

Sehingga besar suku ke 2013 adalah $u_{2013} = ar^{2013-1} = 2^7.(2^{-1})^{2012} = 2^{7-2012} = 2^{2005}$

2) Misalkan sebuah barisan geometri $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 128$ dan banyaknya suku adalah ganjil, tentukanlah

a) Suku tengahnya
b) Suku ke berapakah suku tengahnya?

c) Berapakah banyaknya suku barisan geometri ini?

Jawab :

a) Diketahui barisan geometri $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, 128$. Suku pertama adalah = $u_1 = \frac{1}{8}$ dan $u_n = u_{2k-1} = 128$ serta $r = 2$. Maka suku tengahnya adalah

$$u_k = \sqrt{u_1 . u_{2k-1}} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)(128)} = \sqrt{16} = 4$$

b) Diketahui bahwa $u_k = 4 = ar^{k-1}$

$$\frac{1}{8} . 2^{k-1} = 4 \leftrightarrow 2^{k-1} = 32 \leftrightarrow 2^{k-1} = 2^5 \leftrightarrow k - 1 = 5 \leftrightarrow k = 6$$

Jadi, suku tengahnya adalah suku ke-6

c) Banyaknya suku barisan tersebut adalah $(2k - 1) = 2.6 - 1 = 12 - 1 = 11$

3)Tentukanlah rasio dari barisan geometri, jika

a) Antara $\frac{1}{2}$ dan 16 disisipkan 4 buah bilangan
b) Antara 2 dan 162 disispkan 3 buah bilangan

Jawab :

a) Diketahui $x = \frac{1}{2}$, $y = 16$ dan $k = 4$ (genap), maka r hanya ada 1 kemungkinan:

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}} = \sqrt[4+1]{\frac{16}{\left(\frac{1}{2}\right)}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

Barisan geometri yang dimaksud adalah $\frac{1}{2}, 1,2,4,8,16$.

b) Diketahui $x = 2$, $y = 162$ dan $k = 3$ (ganjil), maka r hanya ada 2 kemungkinan:

$$r = \pm \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}} = \pm \sqrt[3+1]{\frac{162}{2}} = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3 \begin{cases} r = 3, dan \\ r = -4 \end{cases}$$

Barisan geometri yang dimaksud adalah
Untuk $r = 3$ adalah $2,6,18,52,162$ dan
Untuk $r = -3$ adalah $2, -6,18, -52,162$

4.Deret Bilangan

4.1.Pengertian Deret

- Deret adalah jumlah suku-suku secara terurut pada suatu barisan
- Jika suku-suku yang dijumlahkan adalah baisan aritmetika maka deretnya disebut deret aritmetika.
- Jika suku-sku yang dijumlahkan adalah dari barisan geometri maka deretnya disebut deret geometri.

4.2.Deret Aritmetika

- Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ adalah barisan aritmetika, maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ disebut sebagi deret aritmetika.
- u_n adalah suku ke-n atau suku umum deret aritmetika
- $u_n = a + (n-1)b$
- Jika S_n adalah jumlah n suku pertama deret aritmetika, maka $u_n = S_n - S_{n-1}$
- $S_n = \frac{1}{2}(u_1 + u_n)$ atau
- $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

4.3.Deret Geometri(Berhingga)

- Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ adalah barisan geometri, maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ disebut sebagai deret geometri.
- u_n adalah suku ke-n atau suku umum deret geometri
- $u_n = ar^{n-1}$
- Jika S_n adalah jumlah n suku pertama deret geometri, maka $u_n = S_n - S_{n-1}$
- $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ dengan $r < 1$ atau
- $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ dengan catatan $r > 1$

4.4.Deret Geometri tak Berhingga

- Jika suku-suku deret geometri bertambah terus mendekati tak hingga
- Jika jumlah deret geometri adalah $\mathbf{S} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} r^n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n$
- Karena jumlah deret geometri tak hingga adalah $S = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n$ Dan nilai $\lim_{n\to\infty} S_n$ tergantung dengan nilai $\lim_{n\to\infty} r^n$ maka akan ada 2 kemungkinan harga S, yaitu
  a. Jika $|r| < 1$ atau $(-1 < r < 1)$ maka nilai $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Sehingga $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ yang selanjutnya deret ini kita sebut sebagai deret geometri tak hingga yang **konvergen**.
  b. Jika $|r| \geq 1$ atau $(r \leq -1 \ atau \ r \geq 1)$, misalkan untuk nilai $(r < -1 \ atau \ r > 1)$ maka nilai $\lim_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$. Sehingga $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}(\pm\infty) = \pm\infty$,maka deret geometri tak hingga seperti ini tidak memiliki nilai limit jumlah atau **divergen**. Bagaimana jika $r = \pm 1$, silahkan pembaca selidiki untuk kedivergennya.

Contoh D.1

1) (OMITS SMP 2012) Diberikan persamaan kuadrat $2012x^2$ - $2011x + 2010 = 0$, memiliki akar-kar n dan w. Maka nilai dari $(1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots)$ adalah. …

Jawab :

Perhatikanlah bahwa

- $2012x^2 - 2011x + 2010 = 0 \begin{cases} a = 2012 \\ b = -2011 \\ c = 2010 \end{cases} \begin{cases} n + w = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2011)}{2012} = \frac{2011}{2012} \\ nw = \frac{c}{a} = \frac{2010}{2012} \end{cases}$
- $1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots = \frac{1}{1-n}$
- $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots = \frac{1}{1-w}$

Maka nilai dari $(1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + \dots)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots) = \left(\frac{1}{1-n}\right)\left(\frac{1}{1-w}\right) = \frac{1}{1-(n+w)+nw} = \frac{1}{1-\left(\frac{2011}{2012}\right)+\left(\frac{2010}{2012}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2012-2011+2010}{2012}\right)} = \frac{2012}{2011}$

2) Suatu bola dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 1 meter. Jika pantulan bola dari lantai mencapai $\frac{2}{3}$ dari tinggi semula, tentukan jarak yang ditempuh bola sampai berhenti

Jawab :

Jarak yang ditempuh bola tersebut adalah

$S_\infty = a_0 + 2\left(\frac{a_1}{1-r}\right)$ dengan $\begin{cases} a_0 = 1\, meter \\ a_1 = \frac{2}{3} \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$

Sehingga total jarak yang ditempuh bola adalah $S_\infty = 1 + 2\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 + 2.2 = 5\, meter$.

Catatan : rumus $2\left(\frac{a_1}{1-r}\right)$ digunakan karena bola memantul dari suatu ketinggian ke lantai, sehingga kita mendapatkan 2 kali deret geometri dari kejadian setelah bola jatuh dari suatu ketinggian.

3) Hitunglah nilai dari $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots$

Jawab :

Kita misalkan

$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots$ (kalikan S dengan $\frac{1}{2}$)

$\frac{1}{2}S = \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$ $\quad -$

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots}$

Sehingga $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 \leftrightarrow S = 3$

4) hitunglah nilai limit dari

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$
b) $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} - \cdots + (-1)^n\frac{2}{5^n}\right)$

Jawab :

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ adalah deret geometri tak hingga dengan $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$. Sehingga $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) = S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$
b) $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} - \cdots + (-1)^n\frac{2}{5^n}\right) = 2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} - \cdots$ adalah deret geometri tak hingga juga dengan $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{2}{5}}{2} = -\frac{1}{5}$. Sehingga $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} - \cdots + (-1)^n\frac{2}{5^n}\right) = S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{2}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{3}$

4.5.Deret Aritmatika-Geometri Berhingga

- Jika barisan bilangan membentuk barisan bilangan aritmetika dan sekaligus geometri seperti diilustrasikan sebagai :
  $\boldsymbol{a\,,\,(a+b)r,\,(a+2b)r^2,\,(a+3b)r^3,\,\ldots\,,\,(a+(n-1)b)r^{n-1}}$.
- Deret aritmetika-geometri memiliki jumlah
  $\boldsymbol{S_n = a + (a+b)r + (a+2b)r^2 + (a+3b)r^3 + \cdots + (a+(n-1)b)r^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)r^k}$
- Sehingga $\boldsymbol{S_n = \frac{a-(a+(n-1))r^n}{1-r} + \frac{br(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}}$

4.6.Deret Aritmetika-Geometri tak Berhingga

- Jika suku-suku deret aritmetika-geometri bertambah terus mendekati tak hingga,
  $\boldsymbol{a + (a+b)r + (a+2b)r^2 + (a+3b)r^3 + \ldots}$

- Karena deret aritmetika-geometri memiliki jumlah $\boldsymbol{S_n = \frac{a-\left(a+(n-1)\right)r^n}{1-r} + \frac{br\left(1-r^{n-1}\right)}{(1-r)^2}}$, di mana nilai S bergantung dengan nilai $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n}$ maka ada 2 kemungkinan, yaitu
    a. Jika $|r| < 1$, maka deret konvergen
    b. Jika $|r| \geq 1$, maka deret akan divergen
- Jika konvergen maka jumlah deret tak hingganya adalah $\boldsymbol{S = \frac{a}{1-r} + \frac{br}{(1-r)^2}}$

Contoh D.2

1) Tentukanlah jumlah dari $2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{2^2} + \frac{11}{2^3} + \frac{14}{2^4} + \cdots$

Jawab :

Syarat suku awal deret geometri adalah 1 adalah terpenuhi, sehingga jumlah deret di atas adalah

$$2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{2^2} + \frac{11}{2^3} + \frac{14}{2^4} + \cdots \begin{cases} a = 2 \\ r = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \\ u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

Sehingga jumlahnya deret tersebut adalah

$$\boldsymbol{S = \frac{a}{1-r} + \frac{br}{(1-r)^2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + \frac{(3)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 4 + 6 = 10}$$

Jadi, jumlah suku dari $2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{2^2} + \frac{11}{2^3} + \frac{14}{2^4} + \cdots = 10$

2) Perhatikan kembali **Contoh D.1** no.3

Hitunglah nilai dari $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots$

Jawab :

Misalkan $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \cdots$

Deret di atas dapat dipandang sebagai deret aritmetika-geometri, untuk menyelesaikannya kita ubah dahulu suku pertama bagian deret geometri dari 2 menjadi 1, yaitu dengan mengalikan 2 pada masing-masing ruas. Sehingga kita mendapatkan

$$\mathbf{2S = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \cdots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + \frac{(2)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2 + 4 = 6}$$

$$\mathbf{S = \frac{6}{2} = 3}$$

4.7.Deret Khusus

- Lihat bahasan pada bagian barisan khusus dan juga bahasan tentang prinsip teleskopik.
- Untuk $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$ adalah bilangan bulat, suatu bilangan disebut bilangan **amenable** jika bilangan-bilangan itu memenuhi kondisi $\sum_{i=1}^{k} u_i = \prod_{i=1}^{k} u_i = n$
  Sebagai misal:
  $2 + 2 = 2 \text{ x } 2 = 4$
  $1 + (-1) + 1 + (-1) + 2 + 2 = 1 \text{ x } (-1) \text{ x } 1 \text{ x } (-1) \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 4$
  $1 + 2 + 3 = 1 \text{ x } 2 \text{ x } 3 = 6$
  $1 + (-1) + 1 + (-1) + 5 = 1 \text{ x } (-1) \text{ x } 1 \text{ x } (-1) \text{ x } 5 = 5$
  $1 + 1 + 2 + 4 = 1 \text{ x } 1 \text{ x } 2 \text{ x } 4 = 8$
  $1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \text{ x } 1 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 8$
- Deret bilangan yang melibatkan deret *Fibonacci*.
  Misalkan F_n merupakan suku $\text{ke} - n$ dari barisan *Fibonacci*, dengan $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ dan $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ serta $n \geq 0$.
  $$\sum_{i=0}^{n} F_1 \binom{n}{i} = F_1 \binom{n}{1} + F_2 \binom{n}{2} + F_3 \binom{n}{3} + \cdots + F_n \binom{n}{n} = F_{2n}$$
- Untuk pertidaksamaan HM-GM-AM-QM
  Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ positif, maka
  $\boldsymbol{min(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \frac{n}{\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}} \leq \sqrt[n]{u_1.u_2 \dots u_n} \leq \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \leq}$
  $\boldsymbol{\sqrt{\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2+\cdots+u_n^2}{n}} \leq maks(u_1, u_2, \dots, u_n)}$
  Dengan :
  a. Rata-rata kuadrat(QM) : $\boldsymbol{min(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \sqrt{\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2+\cdots+u_n^2}{n}} \leq maks(u_1, u_2, \dots, u_n)}$
  b. Rata-rata aritmetika(AM) :
  $\boldsymbol{min(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \leq maks(u_1, u_2, \dots, u_n)}$

c. Rata-rata geometri(GM) : $\boldsymbol{min(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \sqrt[n]{u_1.u_2 \dots u_n} \leq maks(u_1, u_2, \dots, u_n)}$

d. Rata-rata harmonic(HM) :
$\boldsymbol{min(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \frac{n}{\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\dots+\frac{1}{u_n}} \leq maks(u_1, u_2, \dots, u_n)}$

Contoh D.3

1) Buktikan bahwa $1007^{2013} \geq 2013!$

Bukti:

Dengan *pembuktian langsung*

Untuk ketaksamaan AM-GM

$$\frac{1+2+3+\cdots+2013}{2013} \geq \sqrt[2013]{1.2.3 \dots 2013}$$

$$1+2+3+\cdots+2013 \geq 2013\sqrt[2013]{1.2.3 \dots 2013}$$

$$\frac{2013.2014}{2} \geq 2013\sqrt[2013]{1.2.3 \dots 2013}$$

$$1007 \geq \sqrt[2013]{1.2.3 \dots 2013}$$

$$1007^{2013} \geq 1.2.3 \dots 2013$$

$$1007^{2013} \geq 2013!$$

Jadi, benar bahwa $1007^{2013} \geq 2013!$. ■

2) (OSN 2010)Diberikan a, b, c adalah tiga bilangan asli yang berbeda. Buktikan bahwa

$$a+b+c, ab+ac+bc, 3abc$$

Tidak mungkin membentuk barisan aritmetika maupun geometri.

Bukti :

Dengan *pembuktian langsung*

- Untuk ketaksamaan AM-GM , $a, b, c \in \mathbb{N}$ dan $a \neq b \neq c$ kita mendapatkan
  $a^2b^2 + a^2c^2 > 2a^2bc$
  $a^2b^2 + b^2c^2 > 2ab^2c$
  +
  ____

$a^2c^2 + b^2c^2 > 2abc^2$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 > abc(a + b + c)$
$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) > 3abc(a + b + c)$
$(ab + ac + bc)^2 > 3abc(a + b + c)$
$\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} > \frac{3abc}{ab+ac+bc}$
Karena $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} \neq \frac{3abc}{ab+ac+bc}$, jelas bahwa
$a + b + c, ab + ac + bc, 3abc$ tidak akan pernah membentuk barisan geometri

- Perhatikanlah bahwa
  $3abc + (a + b + c) - 2(ab + ac + bc) = a(b - 1)(c - 1) + b(a - 1)(c - 1) + c(a - 1)(b - 1) \geq 0$
  Misalkan juga
  $a(b - 1)(c - 1) + b(a - 1)(c - 1) + c(a - 1)(b - 1) = 0$ hal ini dapat terjadi jika $a = b = c = 1$,tetapi hal ini kontradiksi dengan fakta bahwa $a \neq b \neq c$.
  Sehingga yang benar dalam hal ini adalah
  $3abc + (a + b + c) - 2(ab + ac + bc) > 0$
  Karena $3abc + (a + b + c) - 2(ab + ac + bc) \neq 0$, maka
  $3abc - (ab + ac + bc) \neq (ab + ac + bc) - (a + b + c)$. Hal ini menyebabkan
  $a + b + c, ab + ac + bc, 3abc$ tidak akan pernah membentuk barisan aritmetika.

  Jadi, terbukti bahwa $a + b + c, ab + ac + bc, 3abc$ tidak akan mungkin membentuk barisan aritmetika maupun geometri. ■

5.Induksi Matematika

5.1.Pembuktian Dalam Matematika

5.1.1.Bukti langsung

Pembuktian langsung adalah pembuktian yang dilakukan secara langsung

Contoh E.1

1)Jika diketahui $3|(a + 4b)$, buktikan bahwa $3|(10a + b)$

Catatan: $a|b$ berarti bilangan b dapat dibagi habis oleh a.

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa $3|(a + 4b)$ dengan kata lain $3n = (a + 4b)$, dengan $n \in \mathbb{Z}$, selanjutnya untuk

$$(10a+b) = a + 4b + 9a - 3b = \underbrace{a+4b}_{3n} + 3(3a-b) = 3n + 3(3a-b) = 3\big(n + (3a-b)\big)$$

Sehingga jelas bahwa $3|(10a+b) = 3|\Big(3\big(n+(3a-b)\big)\Big)$ adalah benar adanya.

Jadi, terbukti.

2)Tunjukkan bahwa jumlah kuadrat lima bilangan bulat positif yang berurutan tidak merupakan bilangan kuadrat

Jawab :

Misalkan kelima bilangan bulat positif yang berurutan adalah $(a), (a+1), (a+2), (a+3), (a+4)$ dengan $a \geq 1, a \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya kita kuadratkan masing-masing seperti perintah soal, sebagai berikut

$$(a)^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 + (a+4)^2$$

$$= a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 + a^2 + 8a + 16 = 5a^2 + 20a + 30 = 5(a^2 + 4a + 6) = 5\big(a + 2 + \sqrt{-2}\big)\big(a + 2 - \sqrt{-2}\big)$$

Bentuk terakhir tidak menunjukkan bentuk kuadrat

Jadi, terbukti.

3)Jika diketahui a, b, c bilangan bulat dan 6|$(a+b+c)$, maka buktikan $6|a^3 + b^3 + c^3$

Jawab :

Seperti pada pembahasan sebelumnya, 6|$(a+b+c)$ dapat kita tuliskan sebagai $(a+b+c) = 6k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan perlu kita ingat juga bahwa $a+b+c$ habis dibagi 6 berarti di antara $a, b\ dan\ c$ pasti salah satunya berupa *bilangan genap*.

Perhatikan bahwa $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2)$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 6abc - 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 6abc - 3\Big(\big((a+b+c)(ab+ac+bc)\big) - 3abc\Big)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 6abc - 3(a+b+c)(ab+ac+bc) + 9abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3\Big(\big((a+b+c)(ab+ac+bc)\big) + 3abc\Big)$$

$a^3 + b^3 + c^3 = (6k)^3 - 3(6k)(ab + ac + bc) + 3abc$

Karena di antara $a, b\ dan\ c$ berupa bilangan genap maka bentuk abc pasti berupa bilangan *genap atau nol* dan $3abc$ akan pasti berupa bilangan yang habis dibagi 6. Selanjutnya kita tuliskan $3abc = 6m$, dengan $m \in \mathbb{Z}$.

Sehingga

$a^3 + b^3 + c^3 = (6k)^3 - 3(6k)(ab + ac + bc) + 6m$

$a^3 + b^3 + c^3 = 6(36k^3 - 3k(ab + ac + bc) + m)$

Bentuk terakhir menunjukkan kenyataan bahwa $6|a^3 + b^3 + c^3$ adalah benar

Jadi terbukti

5.1.2.Bukti tak langsung

Ada 2 macam pembuktian tidak langsung, yaitu

a) Dengan kontradiksi
b) Dengan kontraposisi

Contoh E.2

Buktikan bahwa " Jika k^2 bilangan ganjil, maka k bilangan ganjil," dengan menggunakan

a) kontradiksi
b) kontraposisi

Jawab :

a) Bukti dengan **kontradiksi**
   Diketahui bahwa k^2 bilangan ganjil, akan dibuktikan k bilangan ganjil juga.
   Andaikan k bilangan genap, maka k dapat dinyatakan sebagai $k = 2n$,$n \in \mathbb{Z}$.
   Karena $= 2n$, maka $k^2 = (2n)^2 \Leftrightarrow \mathrm{k}^2 = 4\mathrm{n}^2 \Leftrightarrow \mathrm{k}^2 = 2(2\mathrm{n}^2)$. Karena $k^2 = 2(2n^2)$ ini berarti k^2 adalah bilangan genap
   Hal ini bertentangan(kontradiksi) dengan yang diketahui, yaitu k^2 bilangan ganjil. Oleh karena itu **pengandaian haruslah diingkar**, yakni k haruslah bilangan ganjil (terbukti)
b) Bukti dengan **kontraposisi**
   Kontraposisi dari implikasi(pernyataan) pada soal di atas adalah "Jika k bilangan genap, maka k^2 bilangan genap."
   Bukti:

Diketahui bahwa k bilangan genap, akan dibuktikan k^2 juga bilangan genap.
Karena k bilangan genap, maka k dapat dinyatakan sebagai $k = 2n$ $, n \in \mathbb{Z}$.
Untuk $= 2n$, maka $k^2 = (2n)^2 \Leftrightarrow \mathrm{k}^2 = 4\mathrm{n}^2 \Leftrightarrow \mathrm{k}^2 = 2(2\mathrm{n}^2)$.
Karena $k^2 = 2(2n^2)$,maka k^2 adalah bilangan genap.
Terbukti bahwa Jika k bilangan genap, maka k^2 bilangan genap, sehingga terbukti pula bahwa Jika k^2 bilangan ganjil, maka k bilangan ganjil.
Karena kedua pernyataan itu ekuivalen.

5.1.2.1.Paritas (Tambahan)

Paritas adalah Kesamaan harga atau nilai. Dapat juga dikatan bahwa paritas adalah kesepadanan atau kemiripan

- Sifat paling dasar dari bilangan bulat yaitu genap atau ganjil
- Jika $a \in \mathbb{Z}$ dan $\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$, maka a adalah bilangan bulat genap
- Jika $a \in \mathbb{Z}$ dan $\frac{a-1}{2} \in \mathbb{Z}$, maka a adalah bilangan bulat ganjil
- Dua bilangan bulat ganjil dapat dikatakan memiliki paritas yang sama
- Dua bilangan bulat genap juga dikatakan memiliki paritas sama
- Dua bilangan bulat di mana satu genap dan yang satu ganjil dapat dikatakan 2 bilangan bulat memiliki paritas yang *berlawanan*

Contoh E.3

1) 2013 paritasnya adalah ganjil dan 0 paritasnya adalah genap serta bilangan 2 dan 3 memiliki paritas yang berlawanan.

2) (OSK 2012)Tentukan banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi

$$(n-1)(n-3)(n-5)\dots(n-2013) = n(n+2)(n+4)\dots(n+2012)$$

Jawab :

Perhatikanlah soal di atas,

$(n-1), (n-3), (n-5), \dots, (n-2013)$ adalah bilangan-bilangan bulat dengan paritas yang sama, sedangkan $n, (n+2), (n+4), \dots, (n+2012)$ adalah bilangan-bilangan bulat dengan paritas yang sama pula. Paritas bilangan-bilangan bulat di ruas kiri berbeda dengan paritas bilangan-bilangan bulat di ruas kanan. Sehingga kesamaan tidak mungkin terjadi.

Jadi, banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi persamaan di atas adalah 0 (tidak ada).

3) (OSK 2012)Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli berbeda di mana selisih kuadratnya 2012 adalah ….

Jawab :

Misalkan bilangan asli yang dimaksud adalah m dan n dengan $m > n$.

$m^2 - n^2 = 2012 \leftrightarrow (m+n)(m-n) = 2012 = 2^2.503$. Jelas bahwa bilangan 2012 memiliki paritas genap sehingga $m+n$ dan $m-n$ haruslah memiliki paritas yang sama. Oleh karena itu hanya ada satu penyelesaian untuk kasus tersebut yaitu $m+n = 1006$ dan $m-n = 2$. Dari 2 persamaan itu kita mendapatkan $m = 504$ dan $n = 502$

Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli berbeda hanya ada 1.

5.2.Prinsip Induksi Matematika

5.2.1.Prinsip Induksi Pertama

Misalkan (n) , $n \in \mathbb{N}$ adalah pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya

a) $P(1)$ benar, dan
b) Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk semua $n \geq 1$.

Sebagai catatan langkah a) disebut sebagai **basis induksi**, sedangkan untuk langkah b) dinamakan **langkah induksi**. Langkah induksi di sini terdapat asumsi(andaian) yang menyatakan kebenaran $P(n)$ dan asumsi tersebut dinamakan dengan **hipotesis induksi**.

5.2.2.Prinsip Induksi Kedua

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan yang akan kita buktikan kebenarannya dengan $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$ serta semua bilangan asli $n \geq n_0$ tidak harus dimulai dari 1. Ada 2 tahap yang perlu kita buktikan

a) $P(n_0)$ benar, dan
b) Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$

Contoh E.4

1) Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ diperoleh 1=1, sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n + 1)$ juga benar, yaitu

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)\big((n + 1) + 1\big)$

Diketahui bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, sehingga diperoleh

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) = (n + 1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{2}(n + 1)\big((n + 1) + 1\big)$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

2) Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + n.(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$$

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ akan diperoleh 2 = 2, sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + n.(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n + 1)$ juga benar, yaitu

$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + n.(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{3}(n + 1)\big((n + 1) + 1\big)\big((n + 1) + 2\big)$

Diketahui bahwa
$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + n.(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$, sehingga diperoleh

$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + n.(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n + 1\right) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{3}(n+1)\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+1\big)$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots + n.(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

3) Buktikan bahwa

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ akan diperoleh $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$, sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

Diketahui bahwa
$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ sehingga diperoleh

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa
$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

4) Buktikan bahwa

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$$

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n=1$ akan diperoleh $\frac{1}{1^2}\leq 2-\frac{1}{1}$ yaitu 1 = 1, sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n+1}$

Diketahui bahwa
$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} &\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=2-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &=2-\left(\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}\right)=2-\left(\frac{n^2+2n+1-n}{n(n+1)^2}\right)=2-\left(\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}\right)\\ &=2-\left(\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)^2}\right)<2-\left(\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}\right)=2-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa
$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$ benar untuk semua $n\in\mathbb{N}$. ■

5) Buktikan bahwa untuk $n\in\mathbb{N}$,bentuk 5^n-4n-1 akan habis dibagi 16

Bukti :
(i) Langkah basis: Untuk $n=1$ akan diperoleh $5^1-4.1-1=0$ dan 0 habis dibagi 16 atau 16|0 , sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:
Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

5^n-4n-1 habis dibagi 16 selanjutnya $5^n-4n-1=16m$, $m\in\mathbb{Z}$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$5^{n+1}-4(n+1)-1$ Diketahui bahwa
$5^n-4n-1=16m$, $m \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh

$5^{n+1}-4(n+1)-1=5.5^n-4n-5=5(5^n-4n-1)+20n+5-4n-5=$
$5(5^n-4n-1)+16n=5.(16m)+16n=16(5m+n)$

Jelas bentuk di atas adalah bilangan kelipatan 16.

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa
$5^n-4n-1=16m$, $m \in \mathbb{Z}$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

6) Buktikan bahwa bentuk

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Merupakan bilangan bulat untuk semua n

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n=1$ akan diperoleh $\frac{(2.1)!}{2^1.1!}$ = 1 ∈ $\mathbb{Z}$, sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$\frac{(2n)!}{2^n n!}$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$$\frac{\big(2(n+1)\big)!}{2^{n+1}(n+1)!} \in \mathbb{Z}$$

Diketahui bahwa
$\frac{(2n)!}{2^n n!} \in \mathbb{Z}$, sehingga diperoleh

$\frac{\big(2(n+1)\big)!}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^n.2.(n+1).n!}=\frac{(2n+1).(2n)!}{2^n.n!}=(2n+1)\left(\frac{(2n)!}{2^n.n!}\right) \in \mathbb{Z}$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa
$\frac{(2n)!}{2^n n!}$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

7) Buktikan bahwa $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$ selalu berupa bilangan bulat untuk $n \in \mathbb{N}$

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n=1$ akan diperoleh $\left(2+\sqrt{3}\right)^{1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{1}=4 \in \mathbb{Z}$, sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{m}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{m} \in \mathbb{Z}, untuk\ m \leq n\ dan\ m, n \in \mathbb{N}$$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} \in \mathbb{Z}$$

Diketahui bahwa
$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n} \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\right)\left(\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\right)-\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)\right)$$

Ingat bahwa $a^{n+1}+b^{n+1}=(a^{n}+b^{n})(a+b)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})$, untuk kasus di atas kita misalkan $a=\left(2+\sqrt{3}\right)$ dan $b=\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Dengan mengasumsikan bahwa untuk $a=\left(2+\sqrt{3}\right)$ dan $b=\left(2-\sqrt{3}\right)$, bentuk $a^{n}+b^{n}$, $a^{n-1}+b^{n-1}$ dan $a+b$ adalah bilangan bulat, maka $a^{n+1}+b^{n+1}$ juga bilangan bulat.

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$ selalu berupa bilangan bulat adalah benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

8)Buktikan bahwa untuk semua $n \in \mathbb{N}$, bilangan $\left(3+\sqrt{5}\right)^{n}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{n}$habis dibagi 2^{n}

Bukti :

(i) Langkah basis: Untuk $n=1$ akan diperoleh $\left(3+\sqrt{5}\right)^{1}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{1}=6$, dan $\frac{6}{2^{1}}=3$, dimana $3 \in \mathbb{Z}$ atau $\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{1}+\left(3-\sqrt{5}\right)^{1}}{2^{1}}=\frac{6}{2}=3$ dengan $3 \in \mathbb{Z}$ sehingga $P(1)$ benar.

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$$\frac{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n}{2^n}=m \rightarrow (3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n=m.2^n \in \mathbb{Z}\,, untuk\ n \in \mathbb{N}$$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$$\frac{(3+\sqrt{5})^{n+1}+(3-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}=k \in \mathbb{Z}\,, untuk\ n \in \mathbb{N}$$

Diketahui bahwa

$$\frac{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n}{2^n}=m \in \mathbb{Z}\,, untuk\ n \in \mathbb{N}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{(3+\sqrt{5})^{n+1}+(3-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\Big(\left((3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\right)\left((3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})\right) \\
&\quad - \left((3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\right)\left((3+\sqrt{5})^{n-1}+(3-\sqrt{5})^{n-1}\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(m.2^n.(6)-4\left((3+\sqrt{5})^{n-1}+(3-\sqrt{5})^{n-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(3m.2^{n+1}-2^2\left((3+\sqrt{5})^{n-1}+(3-\sqrt{5})^{n-1}\right)\right) \\
&= \frac{3m.2^{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{2^2\left((3+\sqrt{5})^{n-1}+(3-\sqrt{5})^{n-1}\right)}{2^{n+1}} \\
&= 3m-\frac{\left((3+\sqrt{5})^{n-1}+(3-\sqrt{5})^{n-1}\right)}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Ingat bahwa $a^{n+1}+b^{n+1}=(a^n+b^n)(a+b)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})$, untuk kasus di atas kita misalkan $a=(3+\sqrt{5})$ dan $b=(3-\sqrt{5})$.

Dengan mengasumsikan bahwa untuk $a=(3+\sqrt{5})$ dan $b=(3-\sqrt{5})$, bentuk $\frac{a^n+b^n}{2^n}$ dan $\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2^{n-1}}$ adalah bilangan bulat, maka $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2^{n+1}}$ juga bilangan bulat.

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $\frac{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n}{2^n}$ selalu berupa bilangan bulat adalah benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

5.3.Beberapa Kesalahan(fallacy) dalam Pembuktian

Tanpa sengaja kadang kita mengalami kesalahan-kesalahan

Contoh E.5

1) Perhatikan deret berikut

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Ada beberapa hal yang perlu kita perhatikan berkaitan dengan deret, misalkan seperti tersebut di atas. Kita akan mengalami kesalahan apabila kita kerjakan dengan pemisalan atau menggunakan prinsip *teleskopik* sebagaimana berikut ini:

a. Dimisalkan $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
   $S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$
   $S = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$
b. Misal yang lain $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
   $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots)$
   $S = 1 - S$
   $2S = 1$
   $S = \frac{1}{2}$
c. Atau misalkan lagi $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
   $S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots$
   $S = 1 - 0 - 0 - 0 - \cdots$
   $S = 1$

Dari satu deret ada beberapa hitungan yang menghasilkan 3 jumlah yang berbeda.

Padahal menurut konsep matematika untuk deret $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ adalah deret geometri tak hingga dengan $r = -1$, sehinga deret tersebut divergen atau tidak memiliki jumlah

2)perhatikan persamaan berikut, diberikan $a = b$

selanjutnya

a) $ab = a^2$
b) $ab - b^2 = a^2 - b^2$
c) $b(a - b) = (a + b)(a - b)$
d) $b = a + b$
e) $b = 2b$
f) $1 = 2$

Letak kesalahan untuk proses di atas adalah saat langkah c) ke d), karena $a - b = 0$ dan pembagian dengan nol tidak didefinisikan maka hal tersebut harusnya tidak boleh dilakukan.

Contoh Soal dan Pembahasan

1. Jabarkanlah
   a. $\sum_{0<|k|\leq 2} u_k$
   b. $\sum_{\substack{1\leq k\leq 12 \\ gcd(k,12)=1}} u_k$
   c. $\sum_{\substack{1\leq k\leq 12 \\ k\ prima}} u_k$

   Jawab :
   a. $\sum_{0<|k|\leq 2} u_k = u_{-2} + u_{-1} + u_1 + u_2$
   b. $\sum_{\substack{1\leq k\leq 12 \\ gcd(k,12)=1}} u_k = u_1 + u_5 + u_7 + u_{11}$
   c. $\sum_{\substack{1\leq k\leq 12 \\ k\ prima}} u_k = u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11}$

2. Jabarkanlah

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{4} kl^2$$

   Jawab :

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{4} kl^2$$

$$= (1.1^2 + 1.2^2 + 1.3^2 + 1.4^2) + (2.1^2 + 2.2^2 + 2.3^2 + 2.4^2) + (3.1^2 + 3.2^2 + 3.3^2 + 3.4^2)$$

3. Hitunglah nilai dari

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2013}$$

   Jawab :
   Gunakan formula
   $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$
   Sehingga
   $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2013} = \frac{4026}{2014} = \frac{2013}{1007}$

4. (OMITS 2012)Tentukanlah nilai dari

   $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{24} + \frac{8}{65} + \frac{13}{168} + \frac{21}{442} + \ldots = \ldots$

   Jawab :

Deret bilangan di atas merupakan deret teleskopik, coba anda perhatikan penguraian dari bilangan di atas

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$\frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

$\frac{5}{24} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$

$\frac{8}{65} = \frac{1}{5} - \frac{1}{13}$

$\frac{13}{168} = \frac{1}{8} - \frac{1}{21}$

$\frac{21}{442} = \frac{1}{13} - \frac{1}{34}$

..... = ...
dst
________________________ +
1 + 1 = 2
Jadi
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{24} + \frac{8}{65} + \frac{13}{168} + \frac{21}{442} + \ldots = 2$

5. Diberikan susunan bilangan 7474474447444474444474444447..., berapa banyak bilangan sebelum angka 7 yang ke-2013

   Jawab :
   Perhatikan bahwa
   - Sebelum digit 7 yang kedua ada 2 bilangan atau $\frac{2.3}{2} - 1$ bilangan
   - Sebelum digit 7 yang ketiga ada 5 bilangan atau $\frac{3.4}{2} - 1$ bilangan
   - Sebelum digit 7 yang keempat ada 9 bilangan atau $\frac{4.5}{2} - 1$ bilangan
   - dst
   - sebelum digit 7 yang ke-n ada bilangan sebanyak $\frac{n.(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ bilangan

   sehingga sebelum digit 7 yang ke-2013 ada bilangan sebanyak $\frac{(2013+2)(2013-1)}{2} = \frac{(2015)(2012)}{2} = (1006)(2015)$ angka.

6. Diketahui barisan aritmetika, carilah suku yang diminta
   a. $2,7,12,17, \ldots$ suku ke 2010
   b. $8,11,14,17, \ldots$ suku ke 2011

c. $-21, -18, -15, \ldots$ suku ke 2012
d. $17, 14, 11, 8, \ldots$ suku ke 2013
e. $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ suku ke 2014

Jawab :

a. Diketahui barisan aritmetika $2,7,12,17,\ldots$ dengan $a = 2, b = 5$ dan $u_n = a + (n-1)b = bn + a - b$,sehingga $u_n = 5n - 3$.
   Maka suku ke 2010 adalah $u_{2010} = 5(2010) - 3 = 10050 - 3 = 10047$.
   untuk selanjutnya,
b. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman
c. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman
d. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman
e. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman

7. Jika suku ke 6 dari barisan aritmetika adalah 27 dan suku ke 12 sama dengan 48, tentukanlah suku ke 10.

   Jawab :
   Diketahui
   $u_6 = a + 5b = 27$
   $u_{12} = a + 11b = 48$
   ____________________-
   $-6b = -21 \rightarrow b = \frac{7}{2}$
   Untuk $b = \frac{7}{2} \rightarrow a = 27 - 5b = 27 - 5\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{54}{2} - \frac{35}{2} = \frac{19}{2}$
   Sehingga $u_{10} = a + 9b = \frac{19}{2} + 9\left(\frac{7}{2}\right) = 41$

8. Jika pada sebuah deret aritmatika yang terdiri dari n suku (ganjil), dengan suku tengahnya 20 dan beda deret tersebut adalah 3 serta jumlah seluruh sukunya 260. Tentukan U_6

   Jawab :
   Pada deret aritmatika berlaku jumlah seluruh suku = $S_n = n.U_t$.
   Diketahui beda = $b = 3$
   $260 = n.20 \Rightarrow n = 13$,jelas $U_t = suku\ tengah = U_7$
   $U_7 = a + 6b = 20 \;\Rightarrow\; a + 6.3 = 20 \Rightarrow a = 20 - 18 = 2$
   $U_6 = a + 5b = 2 + 5.3 = 2 + 15 = 17$
   Jadi suku ke enam adalah 17

9. Disisipkan 5 bilangan antara 14 dan 86 sehingga membentuk barisan aritmetika, tentukan barisan bilangan yang dimaksud.

   Jawab :

Tentukan dulu beda yang baru(b'), yaitu

$$b' = \frac{y-x}{k+1}$$

Dengan $y = 86, x = 14, dan\ k = 5\ sisipan$, maka beda barunya adalah

$$b' = \frac{86-14}{5+1} = \frac{72}{6} = 12$$

Sehingga barisan yang dimaksud adalah $14,26,38,50,62,74,86$.

10. Jika bilangan positif x, y, z membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}, \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Juga barisan aritmetika

Jawab :

Dengan model pembuktian langsung.

Perhatikan bahwa untuk x, y, z adalah barisan aritmetika, maka berlaku

- $2y = x + z$
- $x - z = 2(x - y)$
- $x - y = y - z$
- $x - y = \frac{1}{2}(x - z)$

Sehingga untuk

$$\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}, \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Membentuk barisan aritmetika, maka

$$\frac{2}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Atau

$$\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$$

Dengan merasionalkan penyebut, maka

$$\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{z}}{y-z} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y} =$$

(ingat $y - z = x - y$)

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\left(\frac{1}{2}(x-z)\right)} = \frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)}{x-z} = \frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)} = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk bilangan positif x, y, z membentuk barisan aritmetika maka $\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}, \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ juga barisan aritmetika. ■

11. (UM IKIP PGRI 2009)jumlah dari n bilangan positif genap yang pertama adalah 306. Jumlah 5 bilanga terakhir dari barisan bilangan genap tersebut adalah. …

    Jawab :
    Misalkan S_n adalah jumlah bilangan genap yang dimaksud, maka
    $S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)b) = 306$, dengan $a = 2$, $b = 2$ dan n adalah banyak sukunya.
    Sehingga
    $\frac{n}{2}(2 + 2 + (n-1)2) = 306 \leftrightarrow n\big(1 + 1 + (n-1)\big) = 306 \leftrightarrow n(n+1) = 306 = 17.18 = (17)(17+1) \rightarrow n = 17$
    Untuk $u_n = a + (n-1)b \rightarrow u_n = 2 + (17-1)2 = 34$
    Jadi kelima bilangan tersebut adalah; $26,28,30,32,34$

12. Diketahui barisan geometri, tentukan suku yang diminta
    a. $4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$ suku ke 2010
    b. $2,-2\sqrt{3},6,-6\sqrt{3},\ldots$ suku ke 2011
    c. $\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\ldots$ suku ke 2012
    d. $4,8,16,32,\ldots$ suku ke 2013
    e. $81,27,9,3,\ldots$ suku ke 2014

    Jawab :
    a. Diketahui barisan geometri $4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$ dengan $a = 4, r = \frac{1}{2}$ dan $u_n = ar^{n-1}$,sehingga $u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 2^{1-n} = 2^{3-n}$
       Maka suku ke 2010 adalah $u_{2010} = 2^{3-2010} = 2^{-2007} = \frac{1}{2^{2007}}$
       Untuk selanjutnya,
    b. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman
    c. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman
    d. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman
    e. Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman

13. Diketahui barisan geometri besar suku ke tiga adalah 27 dan besar suku ke lima adalah 3. Tentukanlah barisan geometri tersebut.

    Jawab :
    Diketahui pada barisan geometri, suku ke-n adalah $u_n = ar^{n-1}$, sehingga untuk $u_3 = 27$ dan $u_5 = 3$, maka
    $$\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = r^2 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9} \leftrightarrow r = \pm\frac{1}{3}$$
    Selanjutnya untuk
    $ar^2 = 27 \rightarrow a\left(\frac{1}{9}\right) = 27 \rightarrow a = 243$
    Sehingga untuk

a) $r = \frac{1}{3}$, barisan geometri yang dimaksud adalah $243,81,27,9,3,1,\ldots$

b) $r = -\frac{1}{3}$, barisan geometri yang dimaksud adalah $243,-81,27,-9,3,-1,\ldots$

14. Disisipkan dua bilangan antara 28 dan 112 sehingga membentuk barisan geometri, tentukan barisan bilangan yang dimaksud.

    Jawab :
    Untuk sisipan pada barisan geometri, maka rumus r baru adalah

    $$r' = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$$

    Di mana $k = 2, x = 28, dan\ y = 112$, maka

    $$r' = \sqrt[2+1]{\frac{112}{28}} = \sqrt[3]{4}$$

    Sehingga barisan geometri yang dimaksud adalah $28,28\sqrt[3]{4},56\sqrt[3]{2},112$

15. Seorang bekerja dengan gaji pertamanya adalah $Rp.900.000,-$dan telah dijanjikan untuk tiap tahun akan mendapatkan kenaikan sebesar 10%. Tentukan gajinya pada tahun ke 10 orang tersebut bekerja.

    Jawab :
    Diketahui gaji pertama = $u_1 = 900000$. Pada tahun kedua gajinaya akan mejadi

    $$u_2 = u_1 + \frac{10}{100}.u_1$$
    $$u_2 = 900000 + \frac{10}{100}.900000$$
    $$u_2 = 900000(1 + 0{,}1) = 900000(1{,}1)$$

    Pada tahun ke tiga

    $$u_3 = u_2 + \frac{10}{100}.u_2$$
    $$u_3 = u_2(1 + 0{,}1) = u_2(1{,}1)$$
    $$u_3 = 900000(1{,}1)(1{,}1) = 900000(1{,}1)^2$$

    Maka

    $$u_n = 900000(1{,}1)^{n-1}$$

    Sehingga

    $$u_{10} = 900000(1{,}1)^9$$

    Jadi pada tahun ke sepuluh besar gaji orang tersebut adalah $900000(1{,}1)^9$

16. Diketahui barisan geometri dan tentukan nilai n terkecil sehingga sukunya memenuhi syarat yang diberikan
    a. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$ dan $u_n < 0{,}0001$
    b. $3,6,12,24,\ldots$ dan $u_n > 10000$

Jawab :

a. Diketahui

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ dan $u_n < 0{,}0001$ dengan $u_n = ar^{n-1}$, $a = 1, dan\ r = \frac{1}{2}$

Maka

$$ar^{n-1} < 0{,}0001$$
$$1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-4}$$
$$2^{1-n} < 10^{-4}$$
$$\log 2^{1-n} < \log 10^{-4}$$
$$(1-n)\log 2 < \log 10^{-4}$$
$$(1-n)(0{,}3010) < -4$$
$$1-n < \frac{-4}{0{,}301}$$
$$n-1 > \frac{4}{0{,}301}$$
$$n > 1 + \frac{4}{0{,}301}$$
$$n > 14{,}289$$

Jadi nilai n terkecilnya adalah 15.

b. Diketahui

$3,6,12,24, \ldots$ dan $u_n > 10000$ dengan $u_1 = 3, dan\ r = 2$

Maka

$$ar^{n-1} > 10000$$
$$3.\,2^{n-1} > 10^4$$
$$\log(3)(2^{n-1}) > \log 10^4$$
$$\log 3 + \log 2^{n-1} > 4$$
$$\log 3 + (n-1)\log 2 > 4$$
$$0{,}4771 + (n-1)(0{,}3010) > 4$$
$$(n-1)(0{,}3010) > 4 - 0{,}4771$$
$$(n-1)(0{,}3010) > 3{,}5229$$
$$(n-1) > \frac{3{,}5229}{0{,}3010}$$
$$n > 1 + \frac{3{,}5229}{0{,}3010}$$
$$n > 12{,}7$$

Jadi nilai n terkecilnya adalah 13.

17. (UM IKIP PGRI 2010)Tiga bilangan berurutan membentuk deret aritmetika dengan selisih bilangan ketiga dengan pertama adalah 6. Jika bilangan ketiga ditambah 3 maka akan membentuk deret geometri. Jumlah dari kuadrat bilangan tersebut adalah. …

Jawab :
Misalkan 3 bilangan tersebut adalah a, b, c

- $a + b + c$ adalah deret arit metika
- $c - a = 6$
- $a + b + (c + 3)$ adalah deret geometri

Pada deret geometri berlaku $b^2 = a(c + 3)$.................................1) dan
pada deret aritmetika berlaku $2b = a + c$ ....2)
kuadratkan 2), sehingga $4b^2 = a^2 + c^2 + 2ac$ ....3)
Substitusikan 1) ke 3) maka $4\big(a(c + 3)\big) = a^2 + c^2 + 2ac$
$4ac + 12a = a^2 + c^2 + 2ac \leftrightarrow 12a = a^2 + c^2 - 2ac \leftrightarrow 12a = (c - a)^2 \leftrightarrow$
$12a = 6^2 = 36 \leftrightarrow a = 3$ ....4)
Sehingga $b = 6\ dan\ c = 9$. Maka nilai $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 6^2 + 9^2 = 126$

18. Hitunglah jumlah dari
    a. $1 + 2 + 3 + \cdots + 2013$
    b. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{2013}$
    c. $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{2013}$
    d. $1 + 4 + 16 + 64 + \cdots + 4^{2013}$
    e. $1 + 5 + 25 + 125 + \cdots + 5^{2013}$
    f. $1 + 6 + 36 + 216 + \cdots + 6^{2013}$
    g. $1 + 7 + 49 + 343 + \cdots + 7^{2013}$
    h. $1 + 8 + 64 + 512 + \cdots + 8^{2013}$
    i. $1 + 9 + 81 + 729 + \cdots + 9^{2013}$
    j. $1 + 10 + 100 + 1000 + \cdots + 10^{2013}$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

19. Carilah jawaban dari rumus rekursif berikut
    a) $u_n = u_{n-1} + 3$
    b) $u_n = 5u_{n-1}$
    c) $u_n = 5u_{n-1} + 3$
    d) $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$

Jawab :

a) $u_n = u_{n-1} + 3$ $\quad\rightarrow u_n = u_{n-1} + 1.3$
$u_n = (u_{n-2} + 3) + 3$ $\quad\rightarrow u_n = u_{n-2} + 2.3$
$u_n = \big((u_3 + 3) + 3\big) + 3$ $\quad\rightarrow u_n = u_{n-3} + 3.3$
$\dots$ $\quad\dots$
$u_n = u_{n-(n-1)} + (n - 1).3$ $\quad\rightarrow u_n = u_1 + (n - 1).3$
Jadi, rumus rekursif untuk $u_n = u_{n-1} + 3$ adalah $u_n = u_1 + (n - 1).3$

b) $u_n = 5u_{n-1}$ $\quad\rightarrow u_n = 5^1 u_{n-1}$

$u_n = 5(5u_{n-2})$ $\rightarrow u_n = 5^2 u_{n-2}$
$u_n = 5\big(5(5u_{n-3})\big)$ $\rightarrow u_n = 5^3 u_{n-3}$
… …
$u_n = 5^{n-1} u_{n-(n-1)}$ $\rightarrow u_n = 5^{n-1} u_1$
Jadi, rumus rekursif untuk $u_n = 5u_{n-1}$ adalah $u_n = 5^{n-1} u_1$

c) $u_n = 5u_{n-1} + 3$ $\rightarrow u_n = 5u_n + 3$
$u_n = 5(5u_2 + 3) + 3$ $\rightarrow u_n = 5^2 u_2 + 3(1+5)$
$u_n = 5(5(5u_3 + 3) + 3) + 3$ $\rightarrow u_n = 5^3 u_3 + 3(1 + 5 + 5^2)$
… …
$u_n = 5^{n-1} u_{n-(n-1)} + 3(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-2})$
$u_n = 5^{n-1} u_1 + 3\left(\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)$
$u_n = 5^{n-1} u_1 + 3\left(\frac{5^{n-1}-1}{4}\right)$
$u_n = 5^{n-1} u_1 + \frac{3}{4}(5^{n-1} - 1)$
$u_n = 5^{n-1}\left(u_1 + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$
Jadi, rumus rekursif untuk $u_n = 5u_{n-1} + 3$ adalah $u_n = 5^{n-1}\left(u_1 + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$

d) Misalkan $u_n = x^n, x \neq 0$
Maka untuk relasi rekursif linier homogeny berderajar 2,
$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \rightarrow x^n = 2x^{n-1} + x^{n-2} \rightarrow x^2 = 2x + 1$ (masing-masing ruas dibagi x^{n-2})
$x^2 - 2x - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$
Sehingga diperoleh persamaan rumus rekursifnya, yaitu

$$u_n = c_1\big(1 + \sqrt{2}\big)^n + c_2\big(1 - \sqrt{2}\big)^n$$

Dengan $c_i \, adalah \, koefisien.$

20. Jika diketahui barisan bilangan positif $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots$ dengan

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

dengan $n > 1$. Jika $u_7 = 120$, maka u_8

Jawab :
Misalkan $u_n = x^n$, maka

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \rightarrow x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \rightarrow x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Dari soal kita mendapatkan
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Kita juga bias mendapatkan fakta $x^9 = x^8 + x^7 \rightarrow x^9 - x^8 = x^7 \rightarrow x^8(x-1) = x^7 \rightarrow x^8 = \frac{x^7}{(x-1)} \rightarrow x^8 = \frac{120}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-1} = 60\big(\sqrt{5} + 1\big)$

Jadi, nilai $u_8 = 60\left(\sqrt{5} + 1\right)$

21. Diketahui fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dengan kondisi
(a) $f(1) = 1$
(b) $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \cdots + nf(n) = n(n+1)f(n)$ untuk $n \geq 2$
Tentukanlah nilai dari $f(2013)$

Jawab :
Diketahui $f(1) = 1$

- Untuk $n = 2 \rightarrow f(1) + 2f(2) = 2.3. f(2) \rightarrow f(2) = \frac{1}{4}$
- Untuk $n = 3 \rightarrow f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 3.4. f(3) \rightarrow f(3) = \frac{1}{6}$
- Untuk $n = 4 \rightarrow f(4) = \frac{1}{8}$
- Untuk $n = 5 \rightarrow f(4) = \frac{1}{10}$

Sehingga $f(2013) = \frac{1}{4026}$

22. (OMITS 2012)
Sebuah fungsi dinyatakan dengan bentuk :

$$f\left(f(a+1) + f\left(a + f(a)\right)\right) = a + 2$$

Jika $f(1) = 1$, tentukanlah nilai dari $f(2^2 + 4^2 + 8^2 + 16^2)$

Jawab :
Dari soal diketahui bahwa $f(1) = 1$. Selanjutnya untuk $a = 1$ kita mendapatkan
$f\left(f(1+1) + f\left(1 + f(1)\right)\right) = 1 + 2$
Dengan sedikit manipulasi kita mendapatkan
$f\left(f\left(1 + f(1)\right) + f\left(1 + f(1)\right)\right) = 1 + \left(1 + f(1)\right)$
Misalakan $1 + f(1) = x$, diperoleh
$f\left(f(x) + f(x)\right) = x + 1$
$f\left(2f(x)\right) = x + 1$
Karena $f(1) = 1$ maka ganti x dengan 1, sehingga kita peroleh
$f(2) = 1 + 1 = 2$
Berikutnya, kita peroleh juga $f(4)$ dengan $f(4) = f\left(2f(2)\right) = 2 + 1 = 3$
Demikian juga $f(8) = f\left(2f(4)\right) = 4 + 1 = 5$.
Untuk $f(16) = f\left(2f(8)\right) = 8 + 1 = 9$
Dari pola di atas kita mendapatkan $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ dengan x bilangan asli genap
Sehingga untuk nilai dari
$f(2^2 + 4^2 + 8^2 + 64^2) = f(4180) = \frac{4180}{2} + 1 = 2090 + 1 = 2091$

23. Misalkan $V(n)$ adalah sebuah fungsi yang memenuhi tiga kondisi untuk semua bilangan asli n

a. $V(n)$ adalah bilangan asli
b. $V(n+1) > V(n)$
c. $V\big(V(n)\big) = 3n$

Carilah nilai dari $V(2012)$

Jawa :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca.

24. Tentukan apakah bderet berikut konvergen atau divergen
    a. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$
    b. $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots$
    c. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$
    d. $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots$

    Jawab : (pembahasan diserahkan kepada pembaca)
    a. Deret divergen
    b. Deret divergen
    c. Deret konvergen
    d. Deret konvergen

25. Tentukanlah nilai dari deret
    a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots$
    b. $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} - \cdots$
    c. $16 + 12 + 9 + \cdots$
    d. $10 - 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \cdots$

    Jawab :
    a. Deret di atas adalah deret geometri tak hingga dengan $a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}, serta\ S_\infty = \frac{a}{1-r}$
       Maka $S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$
    b. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
    c. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
    d. Pembahasan diserahkan kepada pembaca

26. Perhatikan desimal bersambung berikut apa bila kita deret dalam bentuk pecahan

$$0{,}121212\ldots = \frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \frac{12}{12^4} + \cdots = \frac{\left(\frac{12}{100}\right)}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99}$$

    Tuliskan desimal berikut dalam bentuk pecahan
    a. 0,1111…

b. 0,2222…
c. 0,3333…
d. 0,4444…
e. 0,5555…
f. 0,6666…
g. 0,7777…
h. 0,8888…
i. 0,9999…
j. 0,343434…
k. 0,105105105…
l. 25,827827…
m. 0,13131313…
n. 0,201320132013…

Jawab :

a. Untuk $0,1111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$, maka nilainya adalah $S_\infty = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$
b. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
c. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
d. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
e. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
f. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
g. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
h. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
i. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
j. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
k. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
l. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
m. Pembahasan diserahkan kepada pembaca
n. Pembahasan diserahkan kepada pembaca

27. Misalkan deret berikut ada, tentukan jumlah deret berikut

a. $a + ar^2 + ar^4 + \cdots$
b. $\sin x + \sin x \cos x + \sin x\, cos^2\, x + \cdots$
c. ${}^2\log x + {}^4\log x + {}^8\log x + \ldots$
d. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Jawab :

a. $S_\infty = \frac{a}{1-r}, maka\ S_\infty = \frac{a}{1-r^2}$ karena $\begin{cases} a = a \\ r = r^2 \end{cases}$
b. $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

c. $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{{}^2\log x}{1-\frac{1}{2}} = 2\left({}^2\log x\right) = {}^2\log x^2$

d. $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

28. Hitunglah nilai limit untuk

a. $\lim_{n\to\infty}\left(3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \cdots + \frac{3}{2^n}x^{n+1}\right)$

b. $\lim_{n\to\infty}(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n})$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

29. Misalkan deret

$$S = \frac{2}{3} - \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} - \frac{2^4}{3^3} + \cdots$$

a. carilah formula jumlah S_n dari n suku pertama

b. tentukanlah nilai S

c. tentukan n sehingga selisih antara S dan S_n kurang dari 10^{-6}

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

30. Misalkan deret geometri dengan $u_n = 2^{n(x-1)}$. Tentukan nilai x agar deret tersebut ada

Jawab :
Perhatikan bahwa

$$u_n = 2^{n(x-1)}$$
$$u_1 = 2^{1(x-1)}$$
$$u_2 = 2^{2(x-1)}$$
$$\ldots$$

Maka $r = \frac{u_2}{u_1}$

$$r = \frac{\left(2^{(x-1)}\right)^2}{(2^{(x-1)})^1} = 2^{(x-1)}$$

Supaya deret ada
Haruslah $|r| < 1 \leftrightarrow -1 < r < 1$

$$-1 < 2^{(x-1)} < 1$$
$$\log 10^{-1} < \log 2^{(x-1)} < \log 10^1$$
$$-\log 10 < \log \frac{2^x}{2} < \log 10$$
$$-\log 10 < \log 2^x - \log 2 < \log 10$$

$$-\log 10 + \log 2 < \log 2^x < \log 10 + \log 2$$

$$\log \frac{2}{10} < x \, log \, 2 < \log 20$$

$$\frac{\log \frac{1}{5}}{\log 2} < x < \frac{\log 20}{\log 2}$$

$${}^2\log 5^{-1} < x < {}^2\log 20$$

$${}^2\log \frac{1}{5} < x < {}^2\log 20$$

31. (OMITS 2012) Untuk jumlah 6036 suku pertama deret geometri adalah 1141 dan jumlah 4024 suku pertamanya sama dengan 780, maka jumlah 2012 suku pertamanya adalah. …

    Jawab :
    Misalkan suku pertama U_1= a, U_2= ar, U_3= ar^2, dan S_{2012} = jumlah 2012 suku pertama, S_{4024} = jumlah 4024 suku pertama serta S_{6036} = jumlah 6036 suku pertama, dimisalkan S_{2012} = x, ditanya S_{2012}?

    maka, ($S_{4024} - S_{2012}$) x ($S_{4024} - S_{2012}$) = (S_{2012}) x ($S_{6036} - S_{4024}$)

    Sehingga (780 – x)(780 – x) = x. (1141 – 780)

    608400 -1560x + x^2 = 361.x

    $x^2 - 1921x + 608400 = 0$

    (x – 400)(x – 1521) = 0

    x = 400 v x = 1521

    Jadi, dengan melihat deretnya maka S_{2012} = x = 400.

32. Tunjukkan bahwa jumlah tak hingga deret aritmetika-geometri $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1-r}} + \frac{\boldsymbol{br}}{(\boldsymbol{1-r})^2}$ untuk $|r| < 1$

    Bukti :
    Perhatikan bahwa rumus jumlah suku ke-n deret aritmetika geometri adalah

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a - \left(a + (n-1)\right)r^n}{1-r} + \frac{br\left(1 - r^{n-1}\right)}{(1-r)^2}}$$

Karena harga $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, maka persamaan rumus menjadi

$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{a-\left(a+(n-1)\right)r^n}}{\boldsymbol{1-r}} + \frac{\boldsymbol{br\left(1-r^{n-1}\right)}}{\boldsymbol{\left(1-r\right)^2}}\right)$

$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+(n-1)\right)r^n}{1-r} + \lim_{n\to\infty}\frac{br}{(1-r)^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{br^n}{(1-r)^2}$

$\lim_{n\to\infty} S = \frac{a}{1-r} - 0 + \frac{br}{(1-r)^2} - 0 = \frac{a}{1-r} + \frac{br}{(1-r)^2}$

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{br}{(1-r)^2}}$. ■

33. (OSK 2002)Jika

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

dan

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}$$

Carilah bilangan bulat yang nilainya paling dekat dengan $a - b$

Jawab :
Pembahasan diserahkan kepada pembaca

34. Tunjukkan bahwa 96 adalah bilangan *amenable*

Jawab :
suatu bilangan disebut bilangan **amenable** jika bilangan-bilangan itu memenuhi kondisi $\sum_{i=1}^{k} u_i = \prod_{i=1}^{k} u_i = n$

Perhatikan bahwa $96 = 32.3 = 2.2.2.2.2.3.\underbrace{1.1.1\ldots1}_{83\ angka\ 1}$

Sehingga $2+2+2+2+2+3+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{83\ angka\ 1} = 2.2.2.2.2.3.\underbrace{1.1.1\ldots1}_{83\ angka\ 1} = 96$

Jadi, terbukti bahwa 96 bilangan *amenable*. ■

Apakah **2013** termasuk bilangan ***amenable***?
Silahkan uraikan sendiri jawaban Anda

35. (OSN 2006)Tentukan bilangan bulat 85-digit terbesar yang memenuhi sifat; jumlah semua digitnya sama dengan hasil kali semua digitnya.

Jawab : (*perhatikan bilangan amenable*)
Pembahasan diserahkan kepada pembaca yang budiman

36. Buktikan bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

Bukti:
(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ diperoleh $1 = 1$, sehingga $P(1)$ benar.
(ii) Langkah induksi:
Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu
$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
Adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $P(n + 1)$ juga benar, yaitu
$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3(n + 1) - 1) = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$
Diketahu bahwa $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$, sehingga diperoleh
$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + (3(n + 1) - 2) = \frac{n(3n-1)}{2} + (3(n + 1) - 2) = \frac{n(3n-1)}{2} + (3n + 1) = \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{(6n+2)}{2} = \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$
Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

37. Buktikan bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

Bukti:
Pembuktian diserahkan kepada pembaca

38. (OMITS 2012)Misalkan F_n merupakan suku $\text{ke} - n$ dari barisan Fibonacci, dengan $F_1 = F_2 = 1$ dan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Tentukanlah nilai dari

$$F_1\binom{2012}{1} + F_2\binom{2012}{2} + F_3\binom{2012}{3} + \cdots + F_{2012}\binom{2012}{2012}$$

Jawab :
Diketahui bahwa $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, dst
Perhatikan untuk $\sum_{i=1}^{n} F_1\binom{n}{1}$
Ambil $n = 2$, maka

$$\sum_{i}^{2} F_i\binom{n}{i} = F_1\binom{2}{1} + F_2\binom{2}{2} = 1(2) + 1(1) = 3 = F_4$$

Misalkan ambil $n = 3$, maka

$$\sum_{i=1}^{3} F_i\binom{n}{i} = F_1\binom{3}{1} + F_2\binom{3}{2} + F_3\binom{3}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_i \binom{3}{i} = 1(3) + 1(3) + 2(1) = 8 = F_6$$

Misalkan lagi ambil $n = 4$, maka

$$\sum_{i=1}^{4} F_i \binom{n}{i} = F_1 \binom{4}{1} + F_2 \binom{4}{2} + F_3 \binom{4}{3} + F_4 \binom{4}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{4} F_i = 1(4) + 1(6) + 2(4) + 3(1) = 21 = F_8$$

Sehingga

- $\sum_{i=1}^{2} F_i \binom{n}{i} = F_4$
- $\sum_{i=1}^{3} F_i \binom{n}{i} = F_6$
- $\sum_{i=1}^{4} F_i \binom{n}{i} = F_8$
- …
- Dst
- $\sum_{i=1}^{2012} F_i \binom{n}{i} = F_{4024}$
- Jadi,

$$F_1 \binom{2012}{1} + F_2 \binom{2012}{2} + F_3 \binom{2012}{3} + \cdots + F_{2012} \binom{2012}{2012}$$
$$= \sum_{i=1}^{2012} F_i \binom{n}{i} = F_{4024}$$

39. Buktikan bahwa
$\forall n \in \mathbb{W}$ berlaku

$$(a + b)^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Bukti :
Dengan induksi matematika

(i) Langkah basis: Untuk n = 0, diperoleh $(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, sehingga $P(1)$ benar

(ii) Langkah induksi:

Asumsikan bahwa $P(n)$ benar, yaitu

$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

Adalah benar (hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$(a+b)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a^{n+1-r}b^r = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$

Kita mulai

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \\ &= a\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \\ &+ b\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \\ &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n+1-r}b^r \\ &+ \sum_{r=0}^{n}a^{n-r}b^{r+1} \\ &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}ab^n + \binom{n}{0}a^n b \\ &+ \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan suku yang sejenis kita mendapatkan

$\binom{n}{0}a^{n+1} + \left(\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right)a^n b + \left(\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right)a^{n-1}b^2 + \cdots + \left(\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right)ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$
Benar untuk semua $n \in \mathbb{W}$. ■

40. Tunjukkan bahwa $n! > 2^n$ untuk $n \geq 4$

Bukti:
(i) Langkah basis: Untuk $n = 4$, maka $4! > 2^4$ adalah benar
(ii) Langkah induksi:
Asumsikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu

$n! > 2^n$ untuk $n \geq 4$
adalah benar(hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu
$(n+1).n! > (n+1).2^n > 2^{n+1}$
$(n+1)! > 2^{n+1}$
Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa untuk $n \geq 4$, $n! > 2^n$. ∎

41. Buktikan bahwa $(1+x)^n \geq 1+nx$, untuk $x > -1$

Bukti :
(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ kita mendapatkan $(1+x)^1 \geq 1+1.x$ adalah benar.
(ii) Langkah induksi:
Asumsikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu
$(1+x)^n \geq 1+nx$, untuk $x > -1$ adalah benar(hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$$
$$\geq 1+(n+1)x$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa $(1+x)^n \geq 1+nx$, untuk $x > -1$. ∎

42. Buktikan bahwa untuk tiap n bilangan asli berlaku

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

Bukti:
Pembuktian diserahkan kepada pembaca

43. Buktikan bahwa $10^n + 3.4^{n+2} + 5$ habis dibagi oleh 9

Bukti :
Bukti diserahkan kepada pembaca

44. Perhatikan bahwa $|x+y| \leq |x|+|y|$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n kumpulan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, berlaku bahwa

$$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$$

Jawab :
Untuk $|x+y| \leq |x|+|y|$,$x, y \in \mathbb{N}$
$|a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$,
$|a_1+a_2+a_3| = |a_1+(a_2+a_3)| \leq |a_1|+|a_2+a_3| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|$
Sehingga dengan cara serupa akan didapatkan
$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$

Jadi, terbukti. ■

45. Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$,

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{5}$$

dengan $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$

Bukti:
(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ kita mendapatkan $x_1 = y_1 = 1$ keduanya adalah bilangan bulat
(ii) Langkah induksi:
Asumsikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{5}$$

dengan $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$
adalah benar(hipotesis induksi). Akan ditunjukkan yaitu

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} = \left(x_n + y_n\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right) = x_n + x_n\sqrt{5} + y_n\sqrt{5} + 5y_n$$
$$= (x_n + 5y_n) + (x_n + y_n)\sqrt{5}$$

karena x_n dan y_n keduanya adalah bilangan bulat maka $(x_n + 5y_n)$ serta $(x_n + y_n)$ juga bulat.
Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa untuk $n \geq 1$,

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{5}$$

dengan $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$. ■

46. Buktikan bahwa untuk bilangan asli pertama *yang lebih besar dari* $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}$ akan selalu habis dibagi oleh 2^{n+1}

Bukti:
(i) Langkah basis: Untuk $n = 1$ kita mendapatkan

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2.1}}{2^{1+1}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} \approx \frac{7{,}46}{4}$$

dengan asumsi $\sqrt{3} = 1{,}73$
benar bahwa bilangan bulat yang lebih besar dari $7{,}46$ adalah 8 dan 8 habis dibagi oleh 4.
(ii) Langkah induksi:
Asumsikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu
bilangan asli pertama *yang lebih besar dari* $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}$ akan selalu habis dibagi oleh 2^{n+1} adalah benar(hipotesis induksi). Akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2(n+1)}}{2^{(n+1)+1}} = \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{n+1}}{2.2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}}{2} = \frac{(2+1{,}73)^{n+1}}{2}$$
$$= \frac{(3{,}73)^{n+1}}{2}$$

Karena bilangan ganjil berpangkat berapapun dari bilangan asli pasti akan tetap ganjil dan bilangan bulangan bulat yang lebih besar dari $(3{,}73)^{n+1}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ serta diasumsikan $\sqrt{3} = 1{,}73$ pasti akan merupkan bilangan kelipatan dua. Sehingga $(3{,}73)^{n+1}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ akan selalu habis dibagi oleh 2.
Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan kebenarannya, maka terbukti bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$ untuk bilangan asli pertama *yang lebih besar dari* $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}$ akan selalu habis dibagi oleh 2^{n+1}. ■

47. Buktikan bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$ bagian bulat dari bilangan $\left(8+3\sqrt{7}\right)^{n}$ merupakan bilangan ganjil.

    Bukti:
    Pembuktian diserahkan kepada pembaca yang budiman

48. Buktikan juga bahwa bilangan asli pertama yang lebih besar dari bilangan $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^{2n}$ akan selalu habis dibagi oleh 2^{2n}

    Bukti:
    Pembuktian diserahkan kepada pembaca yang budiman

DAFTAR PUSTAKA

1. Budhi, Wono Setya. 2003. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: Ricardo.
2. Budhi, Wono Setya. 2010. *Bahan Ajar Persiapan Menuju Olimpiade Sain Nasional/Internasional SMA: Matematika 5*. Jakarta: CV Zamrud Kemala.
3. Hermanto, Eddy. 2010. *Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika Tahun Pelajaran 2010-2011 SMA Negeri 5*. Bengkulu.
4. Hermanto, Eddy. 2010. *Kumpulan Soal dan Solusi Olimpiade Matematika Indonesia: 9 Tahun Penyelenggaraan OSN 2002-2010 SMA Negeri 5*. Bengkulu
5. Hermanto, Eddy. 2012. *Tipe 1: Soal dan Solusi Seleksi Olimpiade Tingkat Kabupaten/Kota 2012 Bidang Matematika SMA Negeri 5*. Bengkulu.
6. Kumpulan Soal Program Pembinaan Kompetensi Siswa. 2007. Tim Matematika ITB.
7. Polyanin, Andrew D, Alexander V. Manzhirov. 2007. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientist*. New York: Chapman & Hall/CRC.
8. Sominskii. 1961. *The Method of Mathematical Induction*. New York : BLAISDELL PUBLISHSING COMPANY.
9. Susilo, Frans. 2012. Landasan Matematika. Yogyakarta: GRAHA ILMU.
10. Tung, Khoe Yao. 2012. *Pintar Matematika SMA Kelas XII IPA Untuk Olimpiade dan Pengayaan Pelajaran*. Yogyakarta: ANDI.
11. Vivaldi, Fanco. 2012. *Mathematical Writing for Undergraduate Students*. University of London.
12. Weisstein, Eric W. 1999. *The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics(part 1 of 4)*. New York: CRC Press.
13. Wirodikromo, Sartono. 2003. *Matematika 2000 Untuk SMU Jilid 2 Kelas 1 Semester 2*. Jakarta: Erlangga.
14. Kumpulan soal dari dalam dan luar negeri.

SUMBER INTERNET

1. Amenable Number
   http://en.wikipedia.org/wiki/Amenable_number diakses 09 November 2013
2. Aritmetico-Geometric Sequence
   http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetico-geometric_sequence diakses 09 November 2013
3. Divergent Series
   http://en.wikipedia.org/wiki/Divergent_series diakses 16 November 2013
4. Fungsi pembangkit
   http://elearning.gunadarma.ac.id/docmodul/pengantar_struktur_diskrit/bab10-fungsi_pembangkit_dan_relasi_rekursi.pdf diakses 01 November 2013.
5. Generating Functions
   http://www.mathdb.org/notes_download/elementary/algebra/ae_A11.pdf diakses 21 Oktober 2013.
6. High School Mathematics Extensions
   http://en.wikibooks.org/wiki/High_school_extension" diakses 22 Desember 2012.
7. Mathematical Fallacy
   http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_fallacy diakses 16 November 2013

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Ahmad Thohir lahir di desa Manggarwetan, kec. Godong, kab. Grobogan, Jawa Tengah pada tanggal 02 Februari 1980. Penulis menamatkan pendidikan dasar di MI Nahdlatut Thullab dan melanjutkan ke MTs Nahdlatut Thullab di desa Manggarwetan lulus pada tahun 1993 dan 1996. Untuk pendidikan tingkat SMA, penulis menyelesaikannya di MA Futuhiyyah 02 Mranggen Demak pada tahun1999. Kemudian penulis menamatkan pendidikan S1 di IKIP PGRI Semarang jurusan Pendidikan Matematika masuk tahun 2000 dan lulus tahun 2004.

Saat ini penulis bekerja sebagai guru PNS (DPK) Kemenag Grobogan di MA Futuhiyah Jeketro Gubug mulai 01 September 2009 sampai sekarang, sebelumnya penulis juga pernah mengajar sebagai GTT di MTs Miftahul Mubtadiin Tambakan Gubug tahun 2003 – 2005 dan di SMK Negeri 3 Semarang tahun 2005 – 2009.

002
MA / SMA
MA FUTUHIYAH
003
BARISAN DAN DERET
OLIMPIADE MATEMATIKA
MA/SMA
MA FUTUHIYAH JEKETRO
GUBUG GROBOGAN
JAWA TENGAH